PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES DES MATRICES SUR LES (PRÉ)-SEMI-ANNEAUX

M. MINOUX
LIP 6, Université Paris 6

Résumé

De nombreuses propriétés classiques des matrices réelles proviennent en fait de propriétés purement combinatoires qui restent valables dans des structures algébriques beaucoup plus générales que le corps des réels : les semi-anneaux et les pré-semi-anneaux. On présente successivement des généralisations aux semi-anneaux :

– du théorème de CAYLEY-HAMILTON,
– du "Matrix tree theorem " de BORCHARDT et TUTTE et de sa version étendue, le "All Minors Matrix Tree Theorem",
– de l'identité de MACMAHON.

Mots clés :
Semi-anneaux, pré-semi-anneaux, bidéterminant.

Abstract

Many classical properties of real matrices actually derive from purely combinatorial properties which remain valid in algebraic structures much more general than the field of real numbers, namely semi-rings and pre-semi-rings. We present here generalizations to semi-rings of :

– the CAYLEY-HAMILTON Theorem ;
– the so-called "Matrix Tree Theorem" due to BORCHARDT and TUTTE, and its extended version, the "All Minors Matrix Tree Theorem".
– the MACMAHON "Master Theorem".

Keywords :
Semi-rings, pre-semi-rings, bideterminant.

1. INTRODUCTION

L'ensemble des matrices à éléments dans un pré-dioïde ou dans un semi-anneau forme, avec les lois induites, un pré-dioïde ou un semi-anneau. Ce rapport est consacré à l'étude de leurs propriétés combinatoires.
Les notions élémentaires de polynômes, de séries formelles et de matrices sur les (pré-)semi-anneaux et les dioïdes sont introduites dans les §§ 2 et 3.
On rappelle ensuite quelques définitions et propriétés de base des permutations (§ 4.1) puis on introduit la notion de *bidéterminant* et de *bipolynôme caractéristique* d'une matrice (§ 4.2 et § 4.3).
Dans le § 5, on donne une preuve combinatoire généralisant, aux pré-semi-anneaux commutatifs, l'identité classique du déterminant d'un produit de deux matrices. Le § 6 donne une preuve combinatoire du théorème de CAYLEY-HAMILTON qui généralise aux pré-semi-anneaux commutatifs la preuve de STRAUBING (1983).
Dans le § 7 on s'intéresse aux liens entre bidéterminant d'une matrice et arborescences du graphe orienté associé. Une extension originale du classique "Matrix Tree Theorem" aux semi-anneaux est établie dans les § 7.1 et 7.2. On étudie ensuite, dans le § 7.4, une forme plus générale de ce résultat qui peut être considérée comme une extension originale aux semi-anneaux du résultat connu sous le nom de "All Minors Matrix Tree Theorem".
Enfin dans le § 8, on présente une version généralisée nouvelle de l'identité de MAC MAHON dans les pré-semi-anneaux commutatifs.

Le terme de ***dioïde*** a été initialement proposé par J. KUNTZMANN (1972) pour désigner la structure algébrique constituée par un ensemble E muni de deux lois de composition internes $\oplus$ et $\otimes$ telles que (E, $\oplus$) est un monoïde commutatif, (E, $\otimes$) est un monoïde (non nécessairement commutatif) avec une propriété de distributivité à droite et à gauche de $\otimes$ par rapport à $\oplus$. En l'absence de propriétés additionnelles des lois $\oplus$ et $\otimes$, une telle structure est assez pauvre et nous lui donnerons ici le nom de ***pré-semi-anneau***, réservant ainsi le nom de ***dioïde*** à des structures à deux lois munies de propriétés supplémentaires qui seront explicitées plus loin.

Définition
On appelle *pré-semi-anneau à droite* une structure algébrique (E, $\oplus$, $\otimes$) formée d'un ensemble de base E et de deux lois de composition internes avec les propriétés suivantes :

(i) $a \oplus b = b \oplus a$ $\forall\, a, b \in E$ (commutativité de $\oplus$)

(ii) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ $\forall\, a, b, c \in E$ (associativité de $\oplus$)

(iii) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ $\forall\, a, b, c \in E$ (associativité de $\otimes$)

(iv) $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ $\forall\, a, b, c \in E$
(distributivité à droite de $\otimes$ relativement à $\oplus$)

La notion de *pré-semi-anneau à gauche* est définie de façon analogue, en remplaçant la distributivité à droite par la distributivité à gauche :

(iv)' $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ $\forall\, a, b, c \in E$.

Notons que dans les définitions ci-dessus, on ne suppose pas l'existence d'éléments neutres. S'ils n'existent pas (ni à droite, ni à gauche), on peut les ajouter sans problème. Dans le cas où ε, l'élément neutre ajouté à $\oplus$, est absorbant par $\otimes$, on a une structure de semi-anneau.

Définition
On appelle *pré-semi-anneau* une structure algébrique $(E, \oplus, \otimes)$ qui est à la fois un pré-semi-anneau à droite et un pré-semi-anneau à gauche.

Définition
La relation de pré-ordre induite par la loi $\oplus$ est définie par : $a \le b$, si et seulement si il existe c tel que $b = a \oplus c$. Lorsque cette relation est une relation d'ordre, on dit que l'ensemble $(E, \oplus)$ est *canoniquement ordonné* relativement à $\oplus$.

Définition
On appelle pré-dioïde à droite (resp : à gauche) un pré-semi-anneau à droite (resp : à gauche) canoniquement ordonné relativement à $\oplus$.
On appelle pré-dioïde un pré-semi-anneau canoniquement ordonné relativement à $\oplus$.

Définition (semi-anneau, semi-anneau à droite, à gauche)
Un *semi-anneau* est un pré-semi-anneau $(E, \oplus, \otimes)$ qui vérifie les propriétés additionnelles suivantes :

(i) $\oplus$ admet un élément neutre ε

(ii) $\otimes$ admet un élément neutre e

(iii) ε est absorbant pour $\otimes$, c'est-à-dire :
$\forall\, a \in E : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$

Un semi-anneau à droite (resp : à gauche) est un pré-semi-anneau à droite (resp : à gauche) vérifiant les propriétés (i) à (iii) ci-dessus.
Un semi-anneau dans lequel l'opération ⊗ est commutative est dit *commutatif*.

Définition (anneau)
On appelle *Anneau* un semi-anneau dans lequel l'ensemble de base E a une structure de *groupe* commutatif pour l'addition ⊕. Un anneau (E, ⊕, ⊗) est dit *commutatif* si l'opération ⊗ est commutative.

Un cas particulier important de la structure d'anneau est évidemment la structure de ***corps*** dans laquelle l'ensemble de base E a une structure de groupe (non nécessairement commutatif) relativement à la loi ⊗. Lorsque ⊗ est commutative, on parle de corps commutatif.

Définition (dioïde, dioïde à droite, dioïde à gauche)
On appelle ***dioïde*** un ensemble (E, ⊕, ⊗) muni de deux lois de composition internes ⊕ et ⊗ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) (E, ⊕) est un monoïde commutatif avec élément neutre ε ;

(ii) (E, ⊗) est un monoïde avec élément neutre e ;

(iii) La relation de préordre canonique relativement à ⊕ (définie par $a \le b \Leftrightarrow \exists\, c : b = a \oplus c$) est une *relation d'ordre*, c'est-à-dire vérifie : $a \le b$ et $b \le a \Rightarrow a = b$

(iv) ε est absorbant pour ⊗, c'est-à-dire : $\forall\, a \in E : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$

(v) ⊗ est distributive à droite et à gauche, relativement à ⊕ ;

On appelle dioïde à droite (resp : à gauche) un ensemble (E, ⊕, ⊗) vérifiant les propriétés (i) à (iv) ci-dessus et où ⊗ est seulement distributive à droite (resp : à gauche) relativement à ⊕.

La différence fondamentale entre un anneau et un dioïde réside dans la propriété (iii). ***Dans un anneau, l'addition induit une structure de groupe, tandis que dans un dioïde, elle induit une structure de monoïde canoniquement ordonné.*** Notons que cela implique ***une disjonction entre la classe des anneaux et la classe des dioïdes.***

Exemple

$\mathbb{Z}$ muni des opérations + et x usuelles, est un *anneau* mais *ce n'est pas un dioïde*.
En effet, dans cette structure, on a toujours, pour tout couple d'entiers relatifs a, b :
$a \leq b$ et $b \leq a$ pour la relation de préordre canonique ($a \leq b \Leftrightarrow \exists\, c : b = a + c$)
Ce n'est donc pas une relation d'ordre. Par contre, le semi-anneau $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels) est un dioïde car la relation de préordre canonique coïncide avec la relation d'ordre (total) habituelle. ||

C'est donc la présence d'une relation d'ordre intrinsèquement liée à la loi addition ⊕ qui constitue la principale distinction entre anneaux et dioïdes.
Cette relation d'ordre conduira naturellement à définir des propriétés topologiques.

Définition (Dioïde idempotent)

On appelle *dioïde idempotent* un dioïde dans lequel l'addition ⊕ est commutative et idempotente.

Un cas particulier fréquemment rencontré est celui où l'addition ⊕ est non seulement idempotente, mais *sélective* (c.à.d. : $\forall$ a, b $\in$ E : $a \oplus b = a$ ou b).

Définition (Dioïde sélectif)

On appelle *dioïde sélectif* un dioïde dans lequel l'addition ⊕ est commutative et sélective.

Les dioïdes idempotents forment une classe particulièrement riche de dioïdes qui contient de nombreuses sous-classes, en particulier :
- les dioïdes double-idempotents et les treillis distributifs ;
- les dioïdes double sélectifs ;
- les dioïdes idempotents-groupes et les dioïdes sélectifs-groupes.

Définition

On appelle *dioïde idempotent-groupe* un dioïde $(E, \oplus, \otimes)$ qui a une structure de monoïde commutatif idempotent pour ⊕ et une structure de groupe pour ⊗. (tout élément de $E \setminus \{\varepsilon\}$ ayant un inverse pour ⊗).

Un cas particulier important pour les applications est celui où l'opération ⊕ est *sélective*.

Définition

On appelle *dioïde sélectif-groupe* un dioïde (E, ⊕, ⊗) qui a une structure de monoïde sélectif pour ⊕ et une structure de groupe pour ⊗. (tout élément de E \ {ε} ayant un inverse pour ⊗).

Exemple Dioïde "Min-Plus"
Prenons pour E l'ensemble des réels $\hat{R} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et définissons les opérations ⊕ et ⊗ par :
$\forall$ a, b ∈ E : a ⊕ b = Min {a, b}
$\forall$ a, b ∈ E : a ⊗ b = a + b (addition des réels)

(E, ⊕) est un monoïde sélectif avec, pour élément neutre, ε = +∞, et (E, ⊗) un groupe avec élément neutre e = 0.

La structure (E, ⊕, ⊗) ci-dessus est donc un dioïde sélectif-groupe.

Notons que, dans la terminologie de la théorie des langages et des automates, des dioïdes sélectifs-groupes tels que Min-Plus ou Max-Plus correspondent à la notion de semi-anneau *Tropical* (cf. par ex. SIMON 1994). ||

2. POLYNÔMES ET SÉRIES FORMELLES À COEFFICIENTS DANS UN (PRÉ-) SEMI-ANNEAU

2.1. POLYNÔMES

Soit (E, ⊕, ⊗) un pré-semi-anneau ou un semi-anneau avec éléments neutres ε et e (pour ⊕ et ⊗ respectivement).

Définition 2.1.1
Un polynôme P de degré n en la variable x est défini par la donnée d'une application f : {0, 1,.... n} → E où, $\forall$ k, $0 \leq k \leq n$, f (k) ∈ E est appelé le coefficient de x^k dans le polynôme P. P peut ainsi être représenté par la somme :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \otimes x^k$$

où la sommation s'entend au sens de l'opération ⊕ (par convention $x^0 = e$ et, $\forall k : \varepsilon \otimes x^k \equiv \varepsilon$).

Conformément à la notation classique nous noterons E [x] l'ensemble des polynômes en x à coefficients dans E.

Soient P et Q deux polynômes de E [x] définis par :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} f(k) \otimes x^k$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{q} g(k) \otimes x^k$$

La *somme* de P et Q notée $S = P \oplus Q$ est le polynôme de degré au plus $s = \mathrm{Max}\,\{p, q\}$ défini par :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{s} \big(f(k) \oplus g(k)\big) \otimes x^k$$

(par convention $f(j) = \varepsilon$ pour $j > p$ et $g(j) = \varepsilon$ pour $j > q$.

Le *produit* de P et Q noté $T = P \otimes Q$ est le polynôme de degré $t = p + q$ défini par :

$$T(x) = \sum_{k=0}^{t} t(k) \otimes x^k$$

avec, $\forall$ k = 0..... t :

$$t(k) = \sum_{\substack{0 \le i \le p \\ 0 \le j \le q \\ i+j=k}} f(i) \otimes g(j)$$

ε étant l'élément neutre de $\oplus$, E [x] admet comme élément neutre pour $\oplus$ le polynôme noté ε (x), de degré 0, défini par : $\varepsilon(x) = \varepsilon \otimes x^0 = \varepsilon$.

e étant l'élément neutre de $\otimes$, E [x] admet comme élément neutre pour $\otimes$ le polynôme noté e (x) de degré 0 défini par : $e(x) = e \otimes x^0 = e$.

Proposition 2.1.2

(i) Si (E, $\oplus$, $\otimes$) est un pré-semi-anneau, alors (E [x], $\oplus$, $\otimes$) est un pré-semi-anneau

(ii) Si (E, $\oplus$, $\otimes$) est un semi anneau, alors (E [x], $\oplus$, $\otimes$) est un semi anneau

(iii) Si (E, $\oplus$, $\otimes$) est un dioïde, alors (E [x], $\oplus$, $\otimes$) est un dioïde

Démonstration :

Elle découle du fait que les propriétés élémentaires de $\oplus$ et $\otimes$ sur E induisent les mêmes propriétés sur E [x]. Montrons seulement que, dans le cas (iii), la relation de préordre canonique sur E [x] définie par :

$P \leq Q \Leftrightarrow \exists\, R \in E[x]$ tel que : $Q = P \oplus R$
est une relation d'ordre.

Si $\quad P(x) = \sum_{k=0}^{p} f(k) \otimes x^k$

$\quad\quad Q(x) = \sum_{k=0}^{q} g(k) \otimes x^k$

alors $P \leq Q \Rightarrow \exists\, R$ avec : $R(x) = \sum_{k=0}^{r} h(k) \otimes x^k$ tel que : $Q = P \oplus R$

De même $Q \leq P \Rightarrow \exists\, R'$ avec : $R'(x) = \sum_{k=0}^{r'} h'(k) \otimes x^k$ tel que :

$P = Q \oplus R'$

Posons $K = \text{Max}\,\{p, q, r, r'\}$ et convenons que :

si	$K > p$	$f(j) = \varepsilon$ pour tout $j \in [p+1, K]$
si	$K > q$	$g(j) = \varepsilon$ pour tout $j \in [q+1, K]$
si	$K > r$	$h(j) = \varepsilon$ pour tout $j \in [r+1, K]$
si	$K > r'$	$h'(j) = \varepsilon$ pour tout $j \in [r'+1, K]$

On en déduit que, $\forall\, k = 0, \ldots K$:

$\exists\, r(k)$: $\quad g(k) = f(k) \oplus r(k)$

$\exists\, r'(k)$: $\quad f(k) = g(k) \oplus r'(k)$

autrement dit :

$$\begin{cases} f(k) \leq g(k) \\ g(k) \leq f(k) \end{cases}$$

Comme $(E, \oplus, \otimes)$ est un dioïde, on en déduit que, $\forall\, k$: $f(k) = g(k)$ donc que $P = Q$

$(E[x], \oplus, \otimes)$ est donc bien dans ce cas un dioïde. □

Le résultat précédent se généralise aisément aux polynômes *multivariables* en plusieurs indéterminées commutatives $x_1, x_2, \ldots x_m$, l'ensemble de ces polynômes étant noté $E[x_1, x_2, \ldots x_m]$.

2.2. SÉRIES FORMELLES

Soit (E, ⊕, ⊗) un pré-semi-anneau ou un semi-anneau avec éléments neutres ε et e (pour ⊕ et ⊗ respectivement).

Définition 2.2.1

Une série formelle F en m indéterminées commutatives $x_1, x_2, \ldots x_m$ est définie par la donnée d'une application $f : N^m \to E$, où : $\forall (k_1, k_2, \ldots . k_m) \in N^m$,
$f(k_1, k_2, \ldots . k_m)$ est le coefficient du terme en $x_1^{k_1} \otimes x_2^{k_2} \otimes \ldots \otimes x_m^{k_m}$

Formellement, on représentera F par la sommation (infinie) :

$$F = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \ldots k_m) \\ \in \mathbb{N}^m}} f(k_1, k_2, \ldots k_m) \otimes x_1^{k_1} \otimes \ldots \otimes x_m^{k_m}$$

Considérons deux séries formelles à coefficients $f(k_1, k_2 \ldots k_m)$ et $g(k_1 \ldots . k_m)$. La somme est la série formelle de coefficients $s(k_1, \ldots k_m)$ définis par :
$\forall (k_1, k_2 \ldots k_m) \in N^m : s(k_1 \ldots . k_m) = f(k_1 \ldots k_m) \oplus g(k_1 \ldots . k_m)$.

Le produit est la série formelle de coefficients $t(k_1 \ldots k_m)$ définis par :
$\forall (k_1 \ldots, k_m) \in N^m : t(k_1, k_2 \ldots, k_m) = \sum f(i_1, i_2 \ldots i_m) \otimes g(j_1, \ldots j_m)$ où la sommation s'étend à toutes les paires de m-uples $(i_1, \ldots i_m) \in N^m$, $(j_1, j_2, \ldots j_m) \in N^m$ tels que :
$i_1 + j_1 = k_1, i_2 + j_2 = k_2, \ldots, i_m + j_m = k_m$.

La proposition 2.1.2 du § 2.1 s'étend aisément aux séries formelles définies ci-dessus.

3. MATRICES CARRÉES À COEFFICIENTS DANS UN (PRÉ)-SEMI-ANNEAU

Soit (E, ⊕, ⊗) un pré-semi-anneau ou un semi-anneau. On note M_n (E) l'ensemble des matrices carrées n x n à éléments dans E.

Etant données deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de M_n (E)

- La somme, notée $A \oplus B$, est la matrice $S = (s_{ij})$ définie par :
  $\forall i, j : s_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$
- Le produit, noté $A \otimes B$, est la matrice $T = (t_{ij})$ définie par :
  $\forall i, j : t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj}$ (sommation au sens de ⊕).

Si E admet un élément neutre ε pour ⊕, la matrice :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon, \varepsilon, \ldots \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \ldots\ldots \varepsilon \end{bmatrix}$$

est élément neutre de M_n (E) pour ⊕.

Si, de plus, E admet un élément unité e, et que ε est absorbant pour ⊗, alors la matrice :

$$I = \begin{bmatrix} e & & & & \\ & e & & \varepsilon & \\ & & \cdot & & \\ & \varepsilon & & \cdot & \\ & & & & e \end{bmatrix}$$

est l'élément unité de M_n (E) pour ⊗.

Il est alors facile de démontrer la propriété :

Proposition 3.1

(i) Si (E, ⊕, ⊗) est un pré-semi-anneau alors (M_n (E), ⊕, ⊗) est un pré-semi-anneau

(ii) Si (E, ⊕, ⊗) est un semi-anneau, alors (M_n (E), ⊕, ⊗) est un semi-anneau (en général non commutatif)

(iii) Si (E, ⊕, ⊗) est un dioïde, alors (M_n (E), ⊕, ⊗) est un dioïde (en général non commutatif)

Dans la suite de ce rapport, nous étudierons les propriétés des matrices carrées n x n à éléments dans un pré-semi-anneau commutatif (E, ⊕, ⊗). Pour certaines des propriétés étudiées, nous aurons à supposer que (E, ⊕, ⊗) a une structure de semi-anneau.

4. BIDETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE. BIPOLYNOME CARACTERISTIQUE

On introduit dans ce paragraphe le concept de *bidéterminant* pour des matrices à coefficients dans un pré-semi-anneau.

4.1. RAPPELS SUR LES PERMUTATIONS

Soit π une permutation de X = {1, 2, ..., n} où, ∀ i ∈ X, π (i) ∈ X dénote l'élément correspondant à i par π. Le *graphe associé à π* est le graphe orienté G_π ayant X comme ensemble de sommets et n arcs de la forme (i, π(i)). Ce graphe peut comporter des boucles (lorsque π (i) ≡ i).

Il est bien connu que le graphe associé à une permutation se décompose en *circuits élémentaires disjoints* (chaque composante connexe est un circuit élémentaire). Si une composante connexe est réduite à un seul sommet i, le circuit correspondant est la boucle (i, i).

La *figure 1* ci-dessous représente le graphe associé à la permutation de {1,...7} définie par : π (1) = 7, π (2) = 4, π (3) = 5, π (4) = 2, π (5) = 1, π (6) = 6, π (7) = 3.

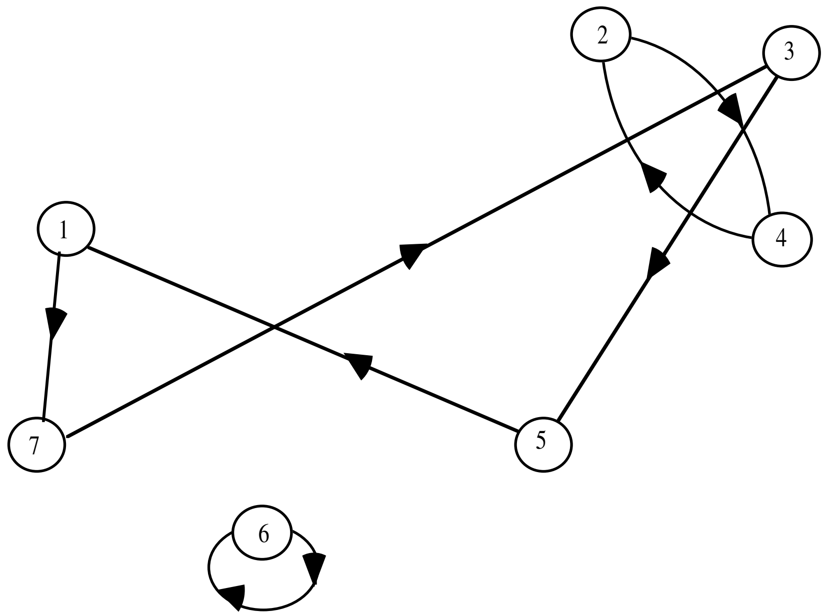

Figure 1 : Graphe associé à une permutation

La *parité* d'une permutation π, est définie comme la parité du nombre de transpositions nécessaires pour transformer la permutation π en la permutation identité.

Ainsi, dans l'exemple précédent, la suite des transpositions nécessaire serait :

$$\begin{pmatrix}7\\4\\5\\2\\1\\6\\3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\4\\5\\2\\7\\6\\3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\5\\4\\7\\6\\3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\7\\6\\5\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{pmatrix}$$

(4 transpositions)

La permutation de la figure 1 est donc *paire*.

D'une façon générale, on démontre :

Propriété 4.1.1

La parité d'une permutation π est égale à la parité du nombre de circuits de longueur paire du graphe G_π associé à la permutation.

Exemple
Le graphe de la *figure 1* comporte deux circuits de longueur paire (1, 7, 3, 5) et (2, 4), la permutation correspondante est donc *paire*. ||

On appelle *signature* d'une permutation π, la quantité sign (π) définie par :

sign (π) = + 1 si π est paire
sign (π) = - 1 si π est impaire

Il est facile de voir que la signature d'une permutation π peut se calculer comme :

$$\text{sign}(\pi) = \prod_{C \text{ circuit de } G_\pi} (-1)^{|C|-1}$$

(où $|C|$ est la cardinalité du circuit, et où le produit s'entend pour l'ensemble des circuits de G_π)

Dans l'exemple de la *figure 1* on a 3 circuits : C_1 = (6) de longueur impaire et C_2 = (2, 4) C_3 = (1, 3, 5, 7) de longueur paire. On a bien :

$$\begin{aligned} \text{sign}(\pi) &= (-1)^{|C_1|-1} \times (-1)^{|C_2|-1} \times (-1)^{|C_3|-1} \\ &= +1 \end{aligned}$$

Dans la suite nous noterons :

Per (n)	l'ensemble de toutes les permutations de {1, 2,..., n}
Per^+ (n)	l'ensemble de toutes les permutations *paires* de {1, 2,..., n} (l'ensemble des permutations de signature + 1)
Per^- (n)	l'ensemble des permutations *impaires* de {1, 2..., n} (de signature - 1)

Nous utiliserons également la notion de *permutation partielle* : une *permutation partielle* de X = {1,…, n} est simplement une permutation d'un sous-ensemble S de X.

Exemple

Si $X = \{1, ..., 7\}$ $S = \{2, 3, 5, 7\}$ alors σ définie par :

$\sigma(2) = 3$; $\sigma(3) = 7$; $\sigma(5) = 5$; $\sigma(7) = 2$.

est une permutation de S et une permutation partielle de X. Le domaine de définition de σ, noté dom (σ), est $S = \{2, 3, 5, 7\}$

A toute permutation partielle σ de $X = \{1, ..., n\}$ on peut associer la permutation $\hat{\sigma}$ de $\{1, ..., n\}$ définie par :

$$\begin{cases} \hat{\sigma}(i) = \sigma(i) & \text{si} \quad i \in \text{dom}(\sigma) \\ \hat{\sigma}(i) = i & \text{si} \quad i \in X \setminus \text{dom}(\sigma) \end{cases}$$

$\hat{\sigma}$ sera appelée la *complétée* de σ.

La *parité* (resp : *signature*) d'une permutation partielle σ est la *parité* (resp : *signature)* de sa complétée $\hat{\sigma}$.

La *caractéristique* d'une permutation partielle σ, notée car (σ), est définie par :

$\text{car}(\sigma) = \text{sign}(\sigma) \times (-1)^{|\sigma|}$

en notant $|\sigma|$ la cardinalité de dom (σ).

Notons que, si σ est une permutation partielle d'ordre k (c.à.d. $|\sigma| = |\text{dom}(\sigma)| = k$) et *cyclique* (c.a.d. telle que le graphe associé comporte un seul circuit couvrant tous les sommets de dom (σ)) alors : $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\hat{\sigma}) = (-1)^{k+1}$, d'où :

$\text{car}(\sigma) = (-1)^{2k+1} = -1$.

On en déduit :

Propriété 4.1.2

Pour toute permutation partielle σ, car (σ) = $(-1)^r$ où r est le nombre de circuits dans le graphe associé à σ.

Exemple

Pour la permutation partielle de $\{1, \ldots, 7\}$ définie par :

$\sigma(2) = 3$; $\sigma(3) = 7$; $\sigma(5) = 5$; $\sigma(7) = 2$.

le graphe associé (cf. figure 2) comporte deux circuits donc : car (σ) = +1. ||

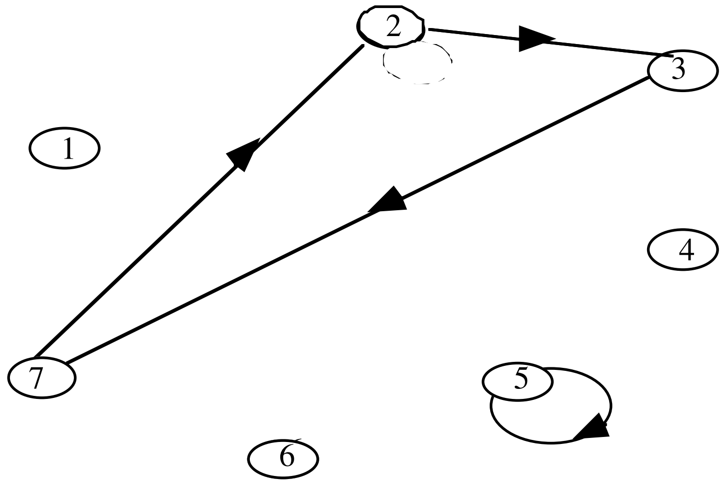

Figure 2 : Graphe associé à une permutation partielle σ de caractéristique + 1 : $\sigma \in$ Part$^+$ (7)

Dans la suite, nous noterons Part (n) l'ensemble de toutes les permutations partielles de {1, …, n} (Remarquer que Per (n) $\subseteq$ Part (n)).
L'ensemble des permutations partielles de caractéristique +1, (resp : de caractéristique – 1), sera noté Part$^+$(n) (resp : Part$^-$(n)).

4.2. BIDÉTERMINANT D'UNE MATRICE

Pour une matrice carrée d'ordre n, A = (a_{ij}) à éléments dans $\mathbb{R}$ muni des opérations usuelles, le déterminant det (A) est classiquement défini par :

$$\det (A) = \sum_{\pi \in Per(n)} \text{sign}(\pi) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \right) \qquad (1)$$

ou encore, avec les notations du § 4.1., par :

$$\det (A) = \sum_{\pi \in Per^+(n)} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \right) - \sum_{\pi \in Per^-(n)} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \right) \qquad (2)$$

(les sommations ci-dessus s'entendent au sens de l'addition des réels). Cette écriture est possible en raison du fait que ($\mathbb{R}$, +) est un *groupe*.

Si l'on veut généraliser la notion de déterminant à des structures algébriques plus pauvres, où l'addition n'induit pas une structure de groupe, il faut introduire la notion de *bidéterminant.*

Définition 4.2.1 (Bidéterminant)

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée n x n à éléments dans un pré-semi-anneau commutatif $(E, \oplus, \otimes)$. On appelle *bidéterminant* de A le couple $(\det^+(A), \det^-(A))$ où les valeurs $\det^+(A) \in E$ et $\det^-(A) \in E$ sont définies par :

$$\det{}^+(A) = \sum_{\pi \in Per^+(n)} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \right) \qquad (3)$$

$$\det{}^-(A) = \sum_{\pi \in Per^-(n)} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \right) \qquad (4)$$

(les sommations et produits ci-dessus s'entendent au sens des opérations $\oplus$ et $\otimes$ du pré-semi-anneau).

4.3. BIPOLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Dans le cas d'une matrice réelle n x n, A, *le polynôme caractéristique* est défini comme le polynôme en la variable λ égal au déterminant de la matrice $\lambda I - A$ où I est la matrice unité n x n :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \sum_{\pi \in Per(n)} \mathrm{sign}(\pi) \left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,\pi(i)} \right) \end{aligned}$$

où, $\forall\, i, j :\ \begin{cases} b_{ij} = -\,a_{ij} & \text{si } i \neq j \\ b_{ij} = \lambda - a_{ij} & \text{si } i = j \end{cases}$

On remarque que, pour tout q, $1 \leq q \leq n$, le coefficient du terme en λ^{n-q} dans l'expression ci-dessus peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\sigma \in Part(n) \\ |\sigma| = q}} \mathrm{sign}(\sigma) \left(\prod_{i \in dom(\sigma)} \left(-a_{i,\sigma(i)}\right) \right) \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in Part(n) \\ |\sigma| = q}} (-1)^{|\sigma|}.\mathrm{sign}(\sigma) \left(\prod_{i \in dom(\sigma)} \left(a_{i,\sigma(i)}\right) \right) \qquad (5) \end{aligned}$$

Pour q = 0, le terme en λ^n a pour coefficient 1. En observant que $(-1)^{|\sigma|}$ sign (σ) n'est autre que la caractéristique car (σ) (cf. § 4.1), (5) se réécrit :

$$\sum_{\substack{\sigma \in Part(n) \\ |\sigma| = q}} \mathrm{car}(\sigma) \times \left(\prod_{i \in dom(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \right) \qquad (6)$$

En notant (cf. § 4.1) $\mathrm{Part}^+(n)$ (resp : $\mathrm{Part}^-(n)$) l'ensemble des permutations partielles de $\{1, \ldots, n\}$ de caractéristique + 1 (resp : de caractéristique – 1) alors la sommation ci-dessus devient :

$$\sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Part}^+(n)\\ |\sigma|=q}} \left(\prod_{i\in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \right) - \sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Part}^-(n)\\ |\sigma|=q}} \left(\prod_{i\in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \right) \qquad (7)$$

Lorsque $A = (a_{ij})$ est une matrice à coefficients dans un pré-semi-anneau $(E, \oplus, \otimes)$, on est alors naturellement conduit à définir le *bipolynôme caractéristique* de la façon suivante.

Définition 4.3.1

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée n x n à éléments dans un pré-semi-anneau commutatif $(E, \oplus, \otimes)$. On appelle bipolynôme caractéristique le couple $(P_A^+(\lambda), P_A^-(\lambda))$ où $P_A^+(\lambda)$ et $P_A^-(\lambda)$ sont deux polynômes de degré n en la variable λ, définis par :

$$P_A^+(\lambda) = \sum_{q=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Part}^+(n)\\ |\sigma|=q}} \left(\prod_{i\in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \right) \right) \otimes \lambda^{n-q} \oplus \lambda^n \qquad (8)$$

et :

$$P_A^-(\lambda) = \sum_{q=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Part}^-(n)\\ |\sigma|=q}} \left(\prod_{i\in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \right) \right) \otimes \lambda^{n-q} \qquad (9)$$

(les sommations et les produits ci-dessus s'entendent au sens de l'addition $\oplus$ et de la multiplication $\otimes$ du pré-semi-anneau $(E, \oplus, \otimes)$).

Notons que, dans le cas où $(E, \oplus, \otimes)$ est un semi-anneau, ε élément neutre de $\oplus$, est absorbant et les formules (8) - (9) donnent :

$$P_A^+(\varepsilon) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{Part}^+(n)\\ |\sigma| = n}} \left(\prod_i a_{i,\sigma(i)} \right)$$

$$P_A^-(\varepsilon) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{Part}^-(n)\\ |\sigma| = n}} \left(\prod_i a_{i,\sigma(i)} \right)$$

Comme, pour $|\sigma| = n$, $\mathrm{char}(\sigma) = (-1)^n \,\mathrm{sign}(\sigma)$, on voit que pour *n pair*, $\mathrm{Part}^+(n) = \mathrm{Per}^+(n)$ et par suite :

$P_A^+(\varepsilon) = \det^+(A) \qquad P_A^-(\varepsilon) = \det^-(A)$

Pour n impair, on a $\mathrm{Part}^+(n) = \mathrm{Per}^-(n)$ et par suite :

$P_A^+(\varepsilon) = \det^-(A) \qquad P_A^-(\varepsilon) = \det^+(A)$.

On retrouve ainsi l'analogue de la propriété classique pour le polynôme caractéristique :

$P_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

5. BI-DÉTERMINANT D'UN PRODUIT DE MATRICES : UNE PROPRIETE COMBINATOIRE DES PRE-SEMI-ANNEAUX

Etant données deux matrices réelles carrées n x n, un résultat classique d'algèbre linéaire est l'identité :

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

Nous étudions dans ce paragraphe la généralisation de ce résultat aux matrices carrées à éléments dans un *pré-semi-anneau commutatif* $(E, \oplus, \otimes)$.

Si $A = (a_{ij})$ $\quad B = (b_{ij})$ $\quad$ et $\quad C = A \otimes B = (C_{ij})$ avec :

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj}$ (sommation au sens de l'opération $\oplus$)

Alors, par définition :

$$\det{}^+(A \otimes B) = \sum_{\pi \in \mathrm{Per}^+(n)} \left(\prod_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i)} \right) \qquad (10)$$

Pour $\pi \in \mathrm{Per}^+(n)$ fixé, on peut écrire :

$$\prod_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i)} = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{k,\pi(i)} \right) \qquad (11)$$

En utilisant la distributivité, chaque terme du développement de l'expression (11) est obtenu en choisissant, pour chaque valeur de i ($1 \le i \le n$), une valeur de $k \in \{1, \ldots, n\}$. Autrement dit, chaque terme du développement est associé à une application f de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ et la valeur du terme correspondant dans (11) est :

$$\prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i),\pi(i)}\right)$$

En notant F(n) l'ensemble des applications de {1, …, n} dans {1, …, n}, (10) peut donc se réécrire :

$$\det{}^{+}(A \otimes B) = \sum_{f \in F(n)} \sum_{\pi \in Per^{+}(n)} \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i),\pi(i)}\right) \qquad (12)$$

On obtiendrait de même :

$$\det{}^{-}(A \otimes B) = \sum_{f \in F(n)} \sum_{\pi \in Per^{-}(n)} \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i),\pi(i)}\right) \qquad (13)$$

Parmi les applications de F(n), on trouve les permutations (paires et impaires), autrement dit :

$F(n) = Per^{+}(n) \cup Per^{-}(n) \cup F'(n)$

où $F'(n)$ dénote l'ensemble de toutes les applications de F(n) qui ne sont pas des permutations.

L'expression (12) peut donc se décomposer en la somme de trois sous-expressions :

$$\alpha^{+} = \sum_{f \in Per^{+}(n)} \sum_{\pi \in Per^{+}(n)} \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i),\pi(i)}\right) \qquad (14)$$

$$\beta^{+} = \sum_{f \in Per^{-}(n)} \sum_{\pi \in Per^{+}(n)} \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i),\pi(i)}\right) \qquad (15)$$

$$\gamma^{+} = \sum_{f \in F'(n)} \sum_{\pi \in Per^{+}(n)} \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i),\pi(i)}\right) \qquad (16)$$

Dans les cas où f est une permutation, soit g la permutation $\pi \circ f^{-1}$. Dans les expressions (14) et (15) ci-dessus, le terme :

$\prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i),\pi(i)}\right)$ peut se réécrire :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,f(i)}\right) \otimes \left(\prod_{i=1}^{n} b_{f(i),\pi(i)}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,f(i)}\right) \otimes \left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,g(i)}\right)$$

Etudions alors l'expression α^{+}.

f étant une permutation paire, f^{-1} est paire et g, comme produit de deux permutations paires est paire. Alors α^{+} peut se réécrire :

$$\alpha^+ = \left(\sum_{f \in Per^+(n)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,f(i)} \right) \otimes \left(\sum_{g \in Per^+(n)} \prod_{i=1}^{n} b_{i,g(i)} \right)$$

$$= \det{}^+(A) \otimes \det{}^+(B) \qquad (17)$$

Etudions maintenant l'expression β^+.

f étant impaire, f^{-1} est impaire et g, comme produit d'une permutation paire et d'une permutation impaire, est impaire. Alors β^+ peut se réécrire :

$$\beta^+ = \left(\sum_{f \in Per^-(n)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,f(i)} \right) \otimes \left(\sum_{g \in Per^-(n)} \prod_{i=1}^{n} b_{i,g(i)} \right)$$

$$= \det{}^-(A) \otimes \det{}^-(B) \qquad (18)$$

De ce qui précède, on déduit :

$$\det{}^+(A \otimes B) = \det{}^+(A) \otimes \det{}^+(B) \oplus \det{}^-(A) \otimes \det{}^-(B) \oplus \gamma^+ \qquad (19)$$

Par un raisonnement analogue, on démontrerait que :

$$\det{}^-(A \otimes B) = \det{}^+(A) \otimes \det{}^-(B) \oplus \det{}^-(A) \otimes \det{}^+(B) \oplus \gamma^- \qquad (20)$$

avec :

$$\gamma^- = \sum_{f \in F'(n)} \sum_{\pi \in Per^-(n)} \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i)\pi(i)} \right) \qquad (21)$$

Nous allons maintenant démontrer :

Lemme 5.1

Les deux expressions γ^+, donnée par (16), et γ^-, donnée par (21), ont la même valeur.

Démonstration

Considérons un terme quelconque de la sommation (16) dont la valeur est :

$$\theta = \prod_{i=1} a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i)\,\pi(i)}$$

avec $f \in F'(n)$ et $\pi \in Per^+(n)$.

Nous allons montrer qu'on peut lui faire correspondre un terme θ' de l'expression (21) tel que $\theta' = \theta$.

Puisque $f \in F'(n)$, f n'est pas une permutation de $X = \{1, \ldots, n\}$, cela signifie donc qu'il existe $i_0 \in X$, $i'_0 \in X$, $k \in X$ tels que :

$$f(i_0) = k = f(i'_0) \qquad (22)$$

S'il existe plusieurs triplets (i_0, i'_0, k) vérifiant (22) on choisira la plus petite valeur de k possible et, pour cette valeur de k, les deux plus petites valeurs possibles pour i_0 et i'_0.
A partir de la permutation π, définissons la permutation π' suivante :

$$\begin{cases} \pi'(j) = & \pi(j) \quad \forall\ j \in X \setminus \{i_0, i'_0\} \\ \pi'(i_0) = & \pi(i'_0) \\ \pi'(i'_0) = & \pi(i_0) \end{cases}$$

On remarque que π' est déduite de π par transposition des éléments i_0 et i'_0, par conséquent $\pi' \in Per^-(n)$. Par ailleurs, on notera que la même construction ayant permis d'obtenir (f, π') à partir de (f, π) permet de retrouver (f, π) à partir de (f, π').

Enfin, on a :

$$\theta' = \prod_{i=1}^{n} \left(a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i), \pi'(i)}\right)$$

$$= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0 \\ i \neq i'_0}}^{n} a_{i, f(i)} \otimes b_{f(i), \pi'(i)} \right) \otimes a_{i_{0,k}} \otimes b_{k, \pi'(i_0)} \otimes a_{i'_{0,k}} \otimes b_{k, \pi'(i_0)}$$

$$= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0 \\ i \neq i'_0}}^{n} a_{i, f(i)} \otimes b_{f(i), \pi(i)} \right) \otimes a_{i_{0,k}} \otimes b_{k, \pi(i_0)} \otimes a_{i'_{0,k}} \otimes b_{k, \pi(i_0)}$$

$$= \theta$$

ce qui achève la démonstration. □

Nous avons donc établi le :

Théorème 1.

Soient A et B deux matrices carrées n x n à coefficients dans un pré-semi-anneau commutatif $(E, \oplus, \otimes)$.

Alors :

$\det^+ (A \otimes B) = \det^+ (A) \otimes \det^+ (B) \oplus \det^- (A) \otimes \det^- (B) \oplus \gamma$

et :

$\det^- (A \otimes B) = \det^+ (A) \otimes \det^- (B) \oplus \det^- (A) \otimes \det^+ (B) \oplus \gamma$

où :

$$\gamma = \sum_{f \in F'(n)} \sum_{\pi \in Per^+(n)} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i),\pi(i)} \right)$$

$$= \sum_{f \in F'(n)} \sum_{\pi \in Per^-(n)} \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,f(i)} \otimes b_{f(i),\pi(i)} \right)$$

$F'(n)$, dans les expressions ci-dessus, dénotant l'ensemble des applications $f : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots n\}$ qui ne sont pas des permutations.

Comme conséquence immédiate de ce qui précède, on retrouve le résultat bien connu :

Corollaire 5.2

Si $(E, \oplus)$ est un groupe, alors :

$\det (A \otimes B) = \det (A) \otimes \det (B)$

6. LE THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON DANS LES PRÉ-SEMI-ANNEAUX

Le théorème de Cayley-Hamilton est un résultat classique d'algèbre linéaire (sur le corps des réels) selon lequel une matrice satisfait sa propre équation caractéristique.

Des preuves combinatoires de ce théorème ont été données par STRAUBING (1983) et auparavant par RUTHERFORD (1964). Le résultat de RUTHERFORD constituait, de plus, une généralisation du théorème au cas des *semi-anneaux*.

Nous donnons ci-dessous une démonstration combinatoire inspirée de STRAUBING (1983) et ZEILBERGER (1985), mais qui généralise encore le théorème au cas de *pré-semi-anneaux commutatifs* (en effet elle ne suppose pas que ε, l'élément neutre de $\oplus$, est absorbant pour $\otimes$).

Théorème 2

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un pré-semi-anneau commutatif avec éléments neutres ε et e.

Soit A une matrice carrée n x n à coefficients dans $(E, \oplus, \otimes)$, et soit $\left(P_A^+(\lambda)\ ,\ P_A^-(\lambda)\right)$ le

bipolynôme caractéristique de A.
Alors on a : $P_A^+(A) = P_A^-(A)$ (23)
où :
$P_A^+(A)$ et $P_A^-(A)$ sont des matrices obtenues en remplaçant λ^{n-q} par la matrice A^{n-q} dans l'expression de $P_A^+(\lambda)$ et $P_A^-(\lambda)$, et où la notation conventionnelle suivante est utilisée :
A^o dénote la matrice dont les termes diagonaux sont égaux à e et les termes non diagonaux égaux à ε ;
pour tout $\alpha \in E$, $\alpha \otimes A^o$ dénote la matrice dont les termes diagonaux sont égaux à α et les termes non diagonaux égaux à ε.

Démonstration :
Nous allons montrer que chaque terme (i, j) de la matrice $P_A^+(A)$ est égal au terme (i, j) de la matrice $P_A^-(A)$.

Considérons donc i et j fixés.
Pour q = 0, 1, … , n -1 , la valeur du terme (i, j) de la matrice A^{n-q} est :

$$\left(A^{n-q}\right)_{ij} = \sum_{\substack{p\in P_{ij}\\ |p|=n-q}} \left(\prod_{(k,l)\in p} a_{k,l} \right)$$

où P_{ij} est l'ensemble des chemins (non nécessairement élémentaires) joignant i à j dans le graphe orienté complet sur l'ensemble des sommets {1, …, n}, et où |p| dénote la cardinalité (en nombre d'arcs) du chemin $p \in P_{ij}$.
Pour q = n, conformément à la convention de notation adoptée, $(A^{n-q})_{i,j}$ vaut ε pour i ≠ j, et e pour i = j.
Par ailleurs, le coefficient de A^{n-q} dans $P_A^+(A)$ est :

$$\sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Part}^+(n)\\ |\sigma|=q}} \left(\prod_{i\in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

et, par suite, le terme (i, j) de la matrice $P_A^+(A)$ (en utilisant la distributivité de ⊗ par rapport à ⊕) est donné par les formules suivantes. Pour i ≠ j :

$$\sum_{q=1}^{n-1} \left[\left(\sum_{\substack{p\in P_{ij}\\ |p|=n-q}} \prod_{(k,l)\in p} a_{k,l} \right) \otimes \left(\sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Part}^+(n)\\ |\sigma|=q}} \prod_{i\in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \right) \right] \oplus \left[\sum_{\substack{p\in P_{ij}\\ |p|=n}} \prod_{(k,l)\in p} a_{k,l} \right] \quad (24)$$

Pour i = j, on doit rajouter à l'expression (24) le terme supplémentaire :

$$\sum_{\substack{\sigma\in \mathrm{Part}^+(n)\\ |\sigma|=n}} \left(\prod_{i\in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

(qui peut être vu comme correspondant à la valeur q = n).

Notons $\mathcal{F}_{ij}^{+}$ (resp : $\mathcal{F}_{ij}^{-}$) la famille des graphes ayant X = {1, 2, …, n} comme ensemble de sommets et dont l'ensemble des arcs U se décompose en : U = P ∪ C où :

- P est un ensemble d'arcs formant un chemin de i à j ;
- C est un ensemble d'arcs tel que le graphe G = [X, C] est le graphe associé à une permutation partielle σ de X avec σ ∈ Part^{+} (n) (resp : σ ∈ Part^{-} (n)).
  En d'autres termes, [X, C] est une réunion d'un nombre pair (resp : impair) de circuits disjoints (boucles autorisées) ne couvrant pas nécessairement tous les sommets.
- |U| = |P| + |C| = n

Le *poids* w (G) d'un graphe G = [X, U] élément de $\mathcal{F}_{ij}^{+}$ ou de $\mathcal{F}_{ij}^{-}$ est défini par :

$$w(G) = \prod_{(k,l)\in U} a_{k,l}$$

Dans le cas où i ≠ j, en développant (24) (distributivité) on remarque alors que le terme (i, j) de P_A^{+} (A) est :

$$\sum_{G\in\mathcal{F}_{ij}^{+}} w(G) \qquad (25)$$

Dans le cas où i = j, en considérant que le chemin P peut être vide dans la décomposition U = P ∪ C, le terme supplémentaire correspondant à q = n est bien pris en compte dans l'expression (25).
De façon analogue, il est facile de voir que le terme (i, j) de P_A^{-} (A) est, dans tous les cas, (i = j et i ≠ j), égal à :

$$\sum_{G\in\mathcal{F}_{ij}^{-}} w(G) \qquad (26)$$

Il nous reste donc à montrer que les deux expressions (25) et (26) sont égales. Pour cela montrons que, à tout graphe G de $\mathcal{F}_{ij}^{+}$, on peut associer un graphe G' de $\mathcal{F}_{ij}^{-}$ de même poids, w (G') = w (G), la correspondance étant biunivoque.

Considérons donc G = [X, P ∪ C] ∈ $\mathcal{F}_{ij}^{+}$. [X, C] est une réunion d'un nombre pair (éventuellement nul) de circuits disjoints par les sommets (la figure 3 donne un exemple où n = 8, i = 1, j = 4).
Comme |P| + |C| = n, on note que nécessairement les ensembles de sommets couverts par P et C ont au moins un élément commun. Par ailleurs, le chemin P n'étant pas nécessairement élémentaire, P peut comporter un (ou plusieurs) circuits.

Parcourons le chemin P en partant de i jusqu'à ce qu'une des deux situations suivantes se produise :

Cas 1 : On arrive à un sommet de P déjà rencontré sans être passé par un sommet couvert par C ;

Cas 2 : On arrive à un sommet k couvert par C.

Dans le *cas 1* on a identifié un circuit Γ de P qui ne contient aucun sommet couvert par C. Dans ce cas, on construit G' = [X, P' ∪ C'] où :

- P' est déduit de P en supprimant le circuit Γ ;
- C' est déduit de C en ajoutant le circuit Γ.

On note que C' contient maintenant un nombre impair de circuits disjoints, donc $G' \in \mathcal{F}_{ij}^{-}$.

Dans le *cas 2*, soit Γ le circuit de C contenant le sommet k. On construit G' = [X, P' ∪ C'] où :

- P' est déduit de P en ajoutant le circuit Γ ;
- C' est déduit de C en supprimant le circuit Γ.

Là encore, C' comporte un nombre impair de circuits disjoints, donc $G' \in \mathcal{F}_{ij}^{-}$.

Par ailleurs, on note que dans les deux cas, G et G' ont le même ensemble d'arcs, donc w (G') = w (G).

Enfin, il est facile de voir que, la même construction qui a permis d'obtenir G' à partir de G permet de retrouver G à partir de G' : il s'agit donc d'une bijection entre $\mathcal{F}_{ij}^{+}$ et $\mathcal{F}_{ij}^{-}$.

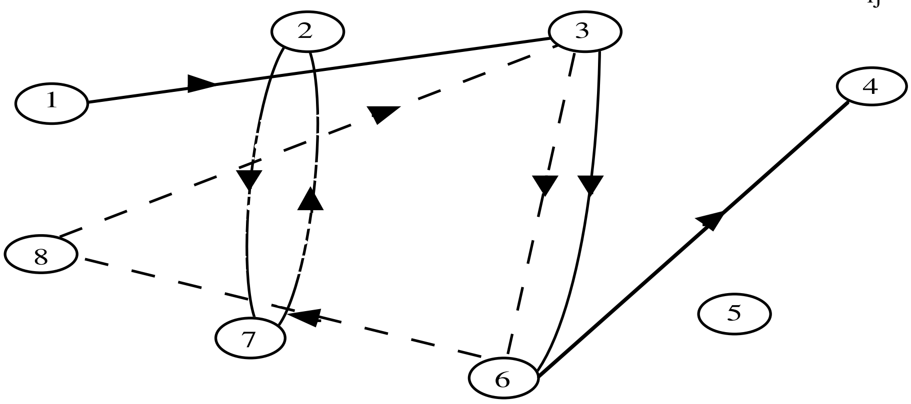

Figure 3 *:* Exemple illustrant la démonstration du théorème de Cayley Hamilton. Un graphe $G \in \mathcal{F}_{ij}^{+}$ pour n = 8, avec i = 1 et j = 4

Le chemin P est indiqué en traits pleins et la permutation partielle σ de caractéristique +1 (car comportant deux circuits disjoints) est indiquée en pointillés.

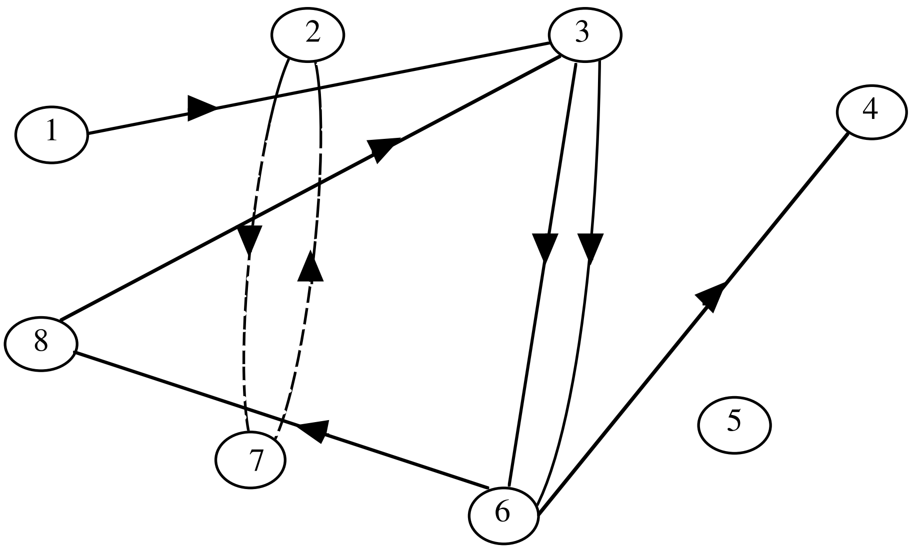

Figure 4 : Le graphe G' obtenu en incluant le circuit (3, 6,8) dans P est un élément de $\mathcal{F}_{ij}^{-}$ et son poids est le même que celui de G

On déduit de ce qui précède que :

$$\sum_{G\in\mathcal{F}_{ij}^{+}} w(G) = \sum_{G\in\mathcal{F}_{ij}^{-}} w(G)$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2. □

7. SEMI-ANNEAUX, BIDÉTERMINANTS ET ARBORESCENCES

Dans ce paragraphe on considère une matrice carrée n x n, $A = (a_{ij})$ à éléments dans un *semi-anneau* commutatif $(E, \oplus, \otimes)$. Nous supposons donc :

- que $\oplus$ admet un élément neutre ε
- que $\otimes$ admet un élément neutre e.
- que ε est *absorbant* pour $\otimes$ c'est-à-dire,

$$\forall x \in E : \qquad \varepsilon \otimes x = x \otimes \varepsilon = \varepsilon$$

Pour $r \in [1, n]$ nous désignerons par $\overline{A}$ la matrice $(n - 1) \times (n - 1)$ déduite de A par suppression de la ligne r et de la colonne r.

Nous noterons I la matrice identité $(n - 1) \times (n - 1)$ de $M_{n-1}(E)$ dont tous les termes diagonaux sont égaux à e et les autres termes à ε.

7.1. UNE EXTENSION AUX SEMI-ANNEAUX DU THEOREME DE BORCHARDT ET TUTTE

Commençons par énoncer ci-dessous le résultat qui sera démontré dans le § 7.2, et qui peut être vu comme une généralisation, aux semi-anneaux, du classique "Matrix-Tree-Theorem" de BORCHARDT (1860) et TUTTE (1948).

Théorème 3

Soit A une matrice carrée n x n à coefficients dans un semi-anneau commutatif $(E, \oplus, \otimes)$. Soit $\overline{A}$ la matrice déduite de A en supprimant la ligne r et la colonne r ($r \in [1, n]$) et soit B la matrice (2n - 2) x (2n - 2) de la forme :

$$B = \left[\begin{array}{c|c} \overline{D} & \overline{A} \\ \hline I & I \end{array}\right]$$

où I est la matrice identité de M_{n-1} (E) et $\overline{D}$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont :

$$d_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, n\} \setminus [r]$$

(somme au sens de $\oplus$).

Désignons par $\mathcal{G}$ le 1-graphe orienté complet sur l'ensemble des sommets $X = \{1, 2, \dots, n\}$ et par $\mathcal{T}_r$ l'ensemble des arborescences de racine r dans $\mathcal{G}$. Pour un graphe partiel quelconque G de $\mathcal{G}$, le poids de G, noté w (G), est le produit (au sens de $\otimes$) des valeurs a_{ij} pour tous les arcs (i, j) de G.

Alors on a l'identité :

$$\det^{+}(B) = \det^{-}(B) \oplus \sum_{G \in \mathcal{T}_r} w(G)$$

7.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Mis à part le lemme 7.2.1 (voir plus loin) emprunté à Zeilberger (1985) la preuve donnée ici est originale.

Pour démontrer le théorème 3, considérons la matrice carrée (2n - 2) x (2n - 2) suivante :

$$B' = \left[\begin{array}{c|c} \overline{A} & \overline{D} \\ \hline I & I \end{array}\right]$$

On remarque que la permutation appliquée aux colonnes de B pour obtenir B' est paire si n- 1 est pair, et impaire si n - 1 est impair. Par suite, si n - 1 est pair on a $\det^+(B) = \det^+(B')$ et $\det^-(B) = \det^-(B')$. Si n - 1 est impair, on a : $\det^+(B) = \det^-(B')$ et $\det^-(B) = \det^+(B')$.

Commençons par étudier les propriétés du bidéterminant de $B' = (b'_{ij})$. On a :

$$\det^+(B') = \sum_{\pi \in Per^+(2n-2)} \left(\prod_{i=1}^{2n-2} b'_{i,\pi(i)} \right) \qquad (27)$$

Dans l'expression ci-dessus, tous les termes correspondant à des permutations π de $\{1, \ldots, 2n-2\}$ telles que $b'_{i,\pi(i)} = \varepsilon$ pour $i \in [1, 2n-2]$ disparaissent à cause de la propriété d'absorption.

Par conséquent, dans (27), ne sont à prendre en compte que les permutations π de $Per^+(2n-2)$ telles que, pour $1 \le i \le n-1$:

$$\pi(i+n-1) = i \qquad \text{ou} \qquad \pi(i+n-1) = i+n-1$$

Chaque permutation π admissible peut donc être associée à une partition de $\overline{X} = \{1, \ldots, n-1\}$ en deux sous-ensembles U et V où :

$$U = \{i \,/\, i \in \overline{X} \,;\, \pi(i+n-1) = i\}$$
$$V = \{i \,/\, i \in \overline{X} \,;\, \pi(i+n-1) = i+n-1\}$$

Par ailleurs, on observe que les colonnes de B' d'indice $i + n - 1$ avec $i \in U$ ne peuvent être couvertes qu'à partir des lignes d'indice $i \in U$. Du fait que $\overline{D}$ est diagonale, on doit donc avoir :

$$\forall i \in U : \qquad \pi(i) = i+n-1$$

Chaque permutation admissible π peut donc être considérée comme formée à partir d'une permutation σ de V (une permutation partielle de $X = \{1, \ldots, n\}$) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall i \in V : & \begin{cases} \pi(i) = \sigma(i) \\ \pi(i+n-1) = i+n-1 \end{cases} \\ \forall i \in U : & \begin{cases} \pi(i) = i+n-1 \\ \pi(i+n-1) = i \end{cases} \end{cases}$$

Le graphe représentatif de π sur l'ensemble des sommets $\{1, \ldots, 2n-2\}$ est donc formé :

- des circuits élémentaires représentant la permutation partielle σ ;
- de $|V|$ boucles sur les sommets $i + n - 1$ $(i \in V)$;
- de $|U|$ circuits de longueur 2 (donc pairs) de la forme $(i, i+n-1)$, $i \in U$.

La signature de π est donc égale à

$$\text{sign}\ (\pi) = \text{sign}\ (\sigma) \times (-1)^{|U|}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\text{sign}\ (\pi) &= \text{sign}\ (\pi) \times (-1)^{2 \times |V|}\\ &= \text{sign}\ (\sigma) \times (-1)^{|V|} \times (-1)^{|U|+|V|}\\ &= \text{car}\ (\sigma) \times (-1)^{n-1}\end{aligned}$$

(puisque V = dom (σ)).

Supposons d'abord que n - 1 est pair. Dans ce cas, sign (π) n'est autre que la caractéristique de σ en tant que permutation partielle de $\overline{X}$, et $\pi \in$ Per^+ (2n - 2) si et seulement si $\sigma \in$ $Part^+$ (n - 1). Alors, (27) peut se réécrire :

$$\begin{aligned}\det^+ (B') &= \sum_{\sigma \in Part^+(n-1)} \left(\prod_{i \in V} a_{i,\sigma(i)} \right) \otimes \left(\prod_{i \in U} d_{ii} \right) \qquad (28)\\ &= \det^+ (B)\end{aligned}$$

On obtiendrait une expression similaire pour $\det^-$ (B') = $\det^-$ (B) en remplaçant simplement $\sigma \in$ $Part^+$ (n - 1) dans (28) par $\sigma \in$ $Part^-$ (n - 1).

Considérons maintenant le cas où n - 1 est impair. On a alors sign (π) = - car (σ), et, par suite, on a :

$$\begin{aligned}\det^+ (B') &= \sum_{\sigma \in Part^-(n-1)} \left(\prod_{i \in V} a_{i,\sigma(i)} \right) \otimes \left(\prod_{i \in U} d_{ii} \right) \qquad (29)\\ &= \det^- (B)\end{aligned}$$

(on obtient l'expression de $\det^-$ (B') = $\det^+$ (B) en remplaçant $\sigma \in$ $Part^-$ (n - 1) dans (29) par $\sigma \in$ $Part^+$ (n - 1)).

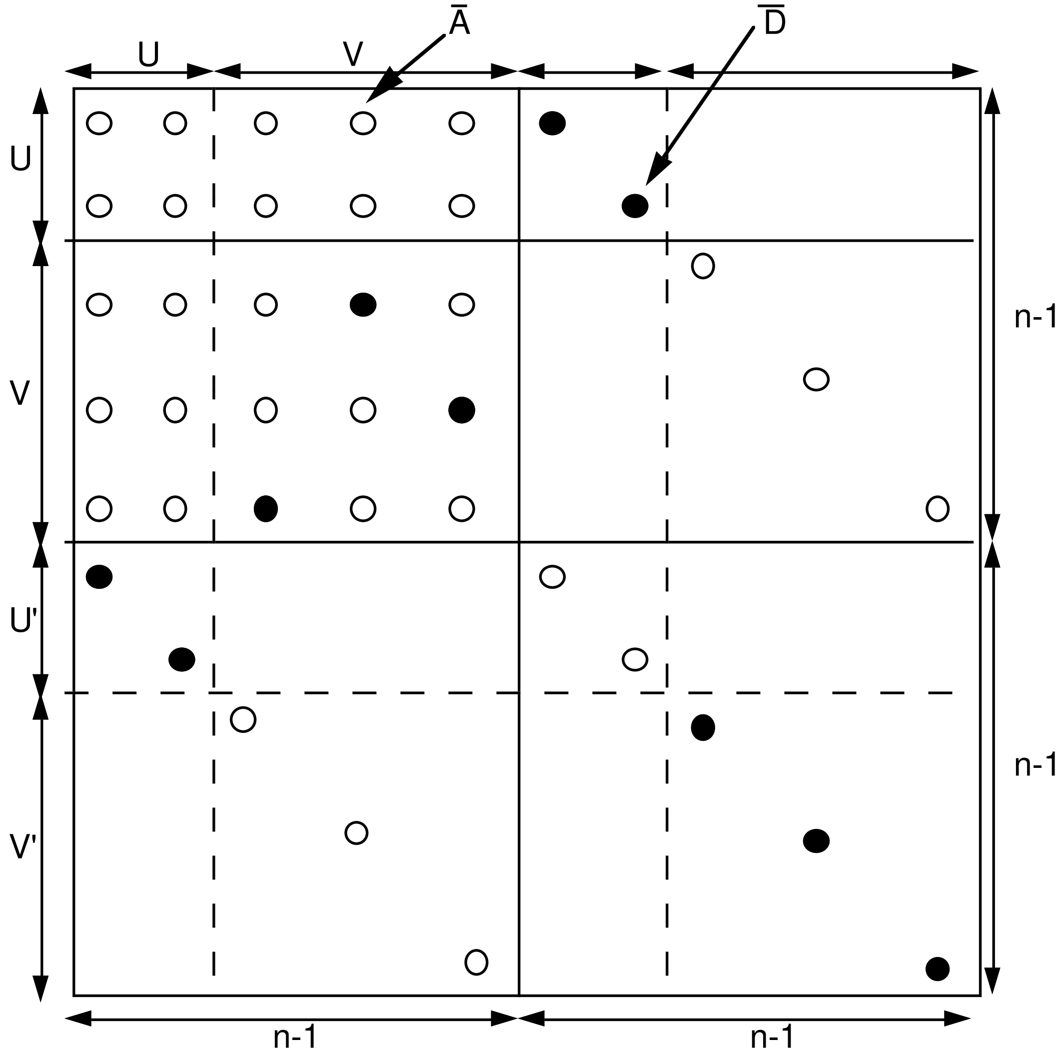

Figure 1 : La matrice B' et une partition de $\overline{X} = \{1, \ldots, n - 1\}$ en deux sous-ensembles U et V correspondant à une permutation admissible π de $\{1, \ldots, 2n - 2\}$. Seuls les termes différents de ε (élément neutre de $\oplus$) sont représentés (par des cercles). Les termes indiqués en noir sont ceux qui correspondent à la permutation π. La permutation partielle σ est celle induite par π sur la sous-matrice restreinte aux lignes et aux colonnes de V.

On constate ainsi que, dans les deux cas (n - 1 pair ou impair), l'expression donnant $\det^+(B)$ est :

$$\det^+(B) \quad = \sum_{\sigma \in \mathrm{Part}^+(n-1)} \left(\prod_{i \in V} a_{i,\sigma(i)} \right) \otimes \left(\prod_{i \in U} d_{ii} \right) \qquad (30)$$

et l'expression donnant $\det^-(B)$ est simplement déduite de la précédente en remplaçant $\sigma \in \mathrm{Part}^+(n-1)$ par $\sigma \in \mathrm{Part}^-(n-1)$.

Notons $\mathcal{F}^+$ (resp : $\mathcal{F}^-$) la famille de tous les graphes orientés construits sur l'ensemble des sommets $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, de la forme $G = [X, C \cup Y]$ où :

- C est un ensemble d'arcs constituant des circuits disjoints par les sommets et comportant un nombre pair (resp : impair) de circuits ;
- Y est un ensemble d'arcs tel que, pour tout $i \in X \setminus \{r\}$ non couvert par C, Y contient un arc et un seul de la forme (i, j) (la possibilité j = i étant autorisée, ainsi que la possibilité j = r).

En développant l'expression (30), c'est-à-dire en remplaçant chaque terme d_{ii} par $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ et en utilisant la distributivité, on remarque alors que $\det^+(B)$ peut se mettre sous la forme :

$$\det^+(B) \quad = \sum_{G \in \mathcal{F}^+} w(G) \qquad (31)$$

où le "poids" w (G) du graphe $G = [X, C \cup Y]$ est :

$$w(G) = \prod_{(k,l) \in C \cup Y} a_{k,l}$$

On démontrerait de façon analogue que :

$$\det^-(B) = \sum_{G \in \mathcal{F}^-} w(G) \qquad (32)$$

Parmi les graphes de $\mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$ ceux *qui ne contiennent pas de cycle* vont jouer un rôle particulier. En effet, dans ce cas, $C = \emptyset$, et l'ensemble Y ne contient pas de cycle et est constitué de n - 1 arcs (un arc sortant pour chaque sommet $i \in X \setminus \{r\}$). Y forme donc une *arborescence de racine r.*

Comme $C = \emptyset$, la sous-famille $\mathcal{T}_r$ (l'ensemble des arborescences de racine r) est nécessairement incluse dans $\mathcal{F}^+$.

Si on note $\mathcal{F}^+ = \mathcal{T}_r \cup \mathcal{F}_c^+$

on peut donc écrire :

$$\det{}^+ (B) = \sum_{G \in \mathcal{T}_r} w(G) \oplus \sum_{G \in \mathcal{F}_c^+} w(G) \qquad (33)$$

Nous allons établir le :

Lemme 7.2.1 (Zeilberger 1985)

$$\sum_{G \in \mathcal{F}_c^+} w(G) = \sum_{G \in \mathcal{F}^-} w(G) \qquad (34)$$

Démonstration

Elle consiste à montrer que, à chaque graphe $G \in \mathcal{F}_c^+$ on peut associer un graphe G' de $\mathcal{F}^-$ avec w (G') = w (G), et que la correspondance est biunivoque.

Considérons donc un graphe G de $\mathcal{F}_c^+$ de la forme G = [X, C ∪ Y].

Ce graphe contient au moins un circuit et [X, C] contient un nombre pair (éventuellement nul) de circuits. Parmi tous les circuits de G, considérons celui qui rencontre le sommet d'indice le plus petit et soit Γ l'ensemble de ses arcs.

Si $\Gamma \subset Y$ alors définissons G' = [X, C' ∪ Y'] avec

$C' = C \cup \Gamma$

$Y' = Y \setminus \Gamma$

Si $\Gamma \subset C$ alors définissons C' et Y' par :

$C' = C \setminus \Gamma$

$Y' = Y \cup \Gamma$

Dans les deux cas, C' contient un nombre impair de circuits, donc $G' \in \mathcal{F}^-$, et comme G et G' ont les mêmes ensembles d'arcs :

w (G') = w (G).

Par ailleurs, on remarque que la même construction qui permet d'obtenir G' à partir de G permet d'obtenir G à partir de G'.

On démontrerait de la même façon que, à tout $G \in \mathcal{F}^-$ on peut associer $G' \in \mathcal{F}_c^+$ tel que w (G') = w (G).

Ceci achève la démonstration du lemme 7.2.1. □

En utilisant le lemme 7.2.1, (33) se réécrit alors :

$$\det^+(B) = \sum_{G\in\mathcal{T}_r} w(G) \oplus \det^-(B)\text{, ce qui établit le théorème 3.} \qquad \square$$

7.3. LA VERSION CLASSIQUE DU THÉORÈME COMME CAS PARTICULIER

Dans le cas particulier où A est une matrice réelle, on voit que

$$\sum_{G\in\mathcal{T}_r} w(G) = \det^+(B) - \det^-(B) = \det(B)$$

où det (B) est le déterminant de B au sens usuel et :

$$\det(B) = \det\left[\begin{array}{c|c} \overline{D} & \overline{A} \\ \hline I & I \end{array}\right]$$

$$= \det\left[\begin{array}{c|c} \overline{D}-\overline{A} & \overline{A} \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

$$= \det(\overline{D}-\overline{A})$$

On en déduit le corollaire suivant, connu sous le nom de "Matrix Tree Theorem", dû indépendamment à BORCHARDT (1860) et à TUTTE (1948) :

Corollaire 7.3.1

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée n x n à coefficients réels ; D la matrice diagonale dont le $i^{\text{ème}}$ terme diagonal est $d_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$; $\overline{A}$ et $\overline{D}$ les matrices déduites de A et D en supprimant la $r^{\text{ième}}$ ligne et la $r^{\text{ième}}$ colonne (r quelconque fixé $1 \le r \le n$). Alors $\det(\overline{D}-\overline{A})$ est égal à la somme des poids des arborescences de racine r dans le graphe associé à la matice A.

Le théorème 3 peut ainsi être considéré comme une extension aux semi-anneaux du "Matrix-Tree Theorem".

7.4. UNE VERSION PLUS GÉNÉRALE DU THÉORÈME

Une version plus générale du "Matrix Tree Theorem", connue sous le nom de "All Minors Matrix Tree Theorem" (cf. CHEN 1976, CHAIKEN 1982) peut également être étendue aux semi-anneaux. Nous présentons ci-dessous (Théorème 4) cette extension. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée n x n à coefficients dans un semi-anneau commutatif $(E, \oplus, \otimes)$, telle que $\forall\ i = 1, \ldots, n : a_{ii} = \varepsilon$ (l'élément neutre de $\oplus$ dans E).

Pour tout $i \in X = \{1, 2, \ldots, n\}$ posons :

$$d_{ii} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ik}$$

Soit $L \subset X$ un sous-ensemble de lignes de A et $K \subset X$ un sous-ensemble de colonnes de A avec $|L| = |K|$.
Soit $\overline{A}$ la sous-matrice de A obtenue en supprimant les lignes de L et les colonnes de K.
Les lignes et les colonnes de $\overline{A}$ sont donc indexées par $\overline{L} = X \setminus L$ et $\overline{K} = X \setminus K$.
En posant $m = |\overline{L}| = |\overline{K}|$ et $p = |\overline{L} \cap \overline{K}|$ considérons la matrice B carrée $(m + p) \times (m + p)$ ayant la structure en blocs :

$$B = \left[\begin{array}{c:c} \overline{A} & Q \\ \hdashline R & I_p \end{array}\right]$$

où :
I_p est la matrice identité p x p du semi-anneau $(E, \oplus, \otimes)$.
Q est une matrice m x p dont les lignes sont indicées par $\overline{L}$ et les colonnes par $\overline{L} \cap \overline{K}$; tous ses termes sont égaux à ε sauf ceux d'indices (i, i) avec $i \in \overline{L} \cap \overline{K}$ qui sont égaux à d_{ii}.

R est une matrice p x m dont les lignes sont indicées par $\overline{L} \cap \overline{K}$ et les colonnes par $\overline{K}$; tous ses termes sont égaux à ε sauf ceux d'indices (i, i) avec $i \in \overline{L} \cap \overline{K}$ qui sont égaux à e (l'élément neutre de $\otimes$ dans E).

Pour tout sous-ensemble $Y \subset X = \{1, 2, \ldots, n\}$ notons $\text{sign}(Y, X) = (-1)^{\nu(Y,X)}$
où :
$\nu(Y, X) = |\{i, j) / i \in X \setminus Y, j \in Y, i < j\}|$
et $s(L, K) = \text{sign}(L, X) \times \text{sign}(K, X) \times (-1)^m$.

Considérons également l'ensemble $\mathcal{T} = \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$ de toutes les forêts orientées H sur l'ensemble des sommets X satisfaisant les trois propriétés suivantes :

(i) H contient exactement $|L| = |K|$ arbres ;

(ii) chaque arbre de H contient exactement un sommet de L et un sommet de K ;

(iii) chaque arbre de H est une arborescence dont la racine est l'unique sommet de K qui y figure.

Les sous-ensemble $\mathcal{T}^+$ et $\mathcal{T}^-$ sont alors définis de la façon suivante.
A chaque H $\in \mathcal{T}$ on peut associer une bijection $\pi^* : L \to K$ définie par : $\pi^*(j) = i$ si et seulement si $i \in K$ et $j \in L$ appartiennent au même arbre de H. $\mathcal{T}^+$ (resp : $\mathcal{T}^-$) est l'ensemble des forêts orientées de $\mathcal{T}$ telles que sign (π^*) = + 1 (resp : sign (π^*) = - 1).

On peut alors énoncer :

Théorème 4

Si s (L, K) = + 1 alors il existe $\Delta \in E$ tel que :

$$\begin{cases} \det^+(B) = \sum_{H \in \mathcal{T}^+} w(H) \oplus \Delta \\ \det^-(B) = \sum_{H \in \mathcal{T}^-} w(H) \oplus \Delta \end{cases}$$

Si s (L, K) = - 1 alors il existe $\Delta \in E$ tel que :

$$\begin{cases} \det^+(B) = \sum_{H \in \mathcal{T}^-} w(H) \oplus \Delta \\ \det^-(B) = \sum_{H \in \mathcal{T}^+} w(H) \oplus \Delta \end{cases}$$

Démonstration

On se reportera à MINOUX (1998). □

8. UNE GENERALISATION DE L'IDENTITÉ DE MAC MAHON AUX PRE-SEMI-ANNEAUX COMMUTATIFS

Considérons une matrice carrée n x n, $A = (a_{ij})$ à coefficients dans un pré-semi-anneau commutatif $(E, \oplus, \otimes)$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant des indéterminées et $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des entiers naturels, on considère l'expression :

$$\begin{aligned} & (a_{11} \otimes x_1 \oplus a_{12} \otimes x_2 \oplus \ldots \; a_{1n} \otimes x_n)^{m_1} \\ & \quad \otimes (a_{21} \otimes x_1 \oplus \ldots \oplus a_{2n} \otimes x_n)^{m_2} \\ & \quad \vdots \\ & \quad \otimes (a_{n1} \otimes x_1 \oplus \ldots \oplus a_{nn} \otimes x_n)^{m_n} \end{aligned} \qquad (35)$$

et on note K $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ le coefficient du terme en $x_1^{m_1} \otimes x_2^{m_2} \otimes \ldots \; x_n^{m_n}$ obtenu en développant l'expression (35).

L'identité de MAC MAHON (1915) établit un lien entre la série formelle S en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de coefficients K $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, et le développement de l'inverse du déterminant de la matrice I - A D_x, où D_x est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les indéterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans le § 8.1, nous généralisons ce résultat aux pré-semi-anneaux commutatifs en donnant une preuve combinatoire à la fois plus simple et plus générale que celle de ZEILBERGER (1985) (elle-même inspirée de FOATA 1965, CARTIER et FOATA (1969)).

8.1. L'IDENTITE DE MAC MAHON GENERALISEE

Théorème 5 :

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un pré-semi-anneau commutatif et $A = (a_{ij}) \in M_n(E)$.

Notons S la série formelle :

$$S = \sum_{(m_1,\ldots m_n)} K(m_1, \ldots, m_n) \otimes x_1^{m_1} \otimes x_2^{m_2} \otimes \ldots \otimes x_n^{m_n} \qquad (36)$$

où la sommation s'étend à tous les n-uples distincts d'entiers naturels (positifs ou nuls).

Alors on a l'identité suivante (identité de MAC MAHON généralisée) :

$$S \otimes \left(\sum_{\sigma \in \mathrm{Part}^+(n)} \prod_{i \in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \otimes x_{\sigma(i)} \right)$$

$$= e \oplus S \otimes \left(\sum_{\sigma \in \mathrm{Part}^-(n)} \prod_{i \in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)} \otimes x_{\sigma(i)} \right) \qquad (37)$$

Démonstration

Considérons la famille $\mathcal{G}(m_1, \ldots, m_n)$ de tous les multigraphes orientés de la forme G = [X, Y] où X = {1, 2, …, n} est l'ensemble des sommets et où l'ensemble des arcs Y vérifie les deux conditions :

(1) $\forall$ i $\in$ X, Y contient exactement m_i arcs d'origine i

(2) $\forall$ i $\in$ X, Y contient exactement m_i arcs d'extrémité i

(noter que les graphes de la famille $\mathcal{G}(m_1, \ldots, m_n)$ peuvent évidemment contenir des boucles).

Le poids de G = [X, Y] est défini comme l'expression formelle :

$$w(G) = \prod_{(k,l) \in Y} (a_{kl} \otimes x_l)$$

(Produit au sens de $\otimes$) avec la convention w (G) = e si Y = $\emptyset$.

On vérifie alors que :

$$K(m_1, \ldots, m_n)\ x_1^{m_1} \otimes x_2^{m_2} \otimes \ldots \otimes x_n^{m_n}$$

$$= \sum_{G \in \mathcal{G}(m_1, \ldots, m_n)} w(G)$$

Par suite, l'expression S donnée par (36) peut se réécrire :

$$S = \sum_{(m_1, \ldots, m_n)} \ \sum_{G \in \mathcal{G}(m_1, \ldots, m_n)} w(G) = \sum_{G \in \mathcal{G}} w(G)$$

avec $\mathcal{G} = \bigcup_{(m_1, \ldots, m_n)} \mathcal{G}(m_1, \ldots, m_n)$

(union étendue à tous les n-uples distincts d'entiers naturels positifs ou nuls).

Considérons maintenant la famille $\mathcal{F}^+$ (resp : $\mathcal{F}^-$) de tous les graphes la forme $G = [X, Y \cup C]$ où :

- $[X, Y] \in \mathcal{G}$
- $[X, C]$ est le graphe représentatif d'une permutation partielle $\sigma \in \text{Part}^+(n)$ (resp : $\sigma \in \text{Part}^-(n)$). C'est donc un ensemble d'arcs formant un nombre pair (resp : impair) de circuits disjoints (certains de ces circuits pouvant être des boucles).

On observe alors que le premier membre de (37) est égal à : $\sum_{G \in \mathcal{F}^+} w(G)$

et le second membre de (37) est égal à : $e \oplus \sum_{G \in \mathcal{F}^-} w(G)$.

Parmi tous les graphes de la famille $\mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^-$, considérons $G_0 = [X, Y \cup C]$ avec $Y = \emptyset$ et $C = \emptyset$. Dans ce cas le graphe $[X, Y]$ correspond à $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, … $m_n = 0$, c'est donc l'unique élément de la famille $\mathcal{G}(0, 0, \ldots 0)$. Par ailleurs, $G_0 \in \mathcal{F}^+$ puisque $C = \emptyset$ correspond à un nombre *pair* de circuits, et $w(G_0) = e$.

Par suite, il nous suffira d'établir que :

$$\sum_{G \in \mathcal{F}^+ \setminus G_0} w(G) = \sum_{G \in \mathcal{F}^-} w(G) \qquad (38)$$

Pour cela, nous allons mettre en évidence une bijection entre $\mathcal{F}^+ \setminus G_0$ et $\mathcal{F}^-$ telle que, si $G \in F^+ \setminus G_0$ et $G' \in \mathcal{F}^-$ sont images par cette bijection, alors $w(G') = w(G)$.

Tous les graphes de la forme $[X, Y \cup C]$ dans $(\mathcal{F}^+ \setminus G_0) \cup \mathcal{F}^-$ seront supposés représentés par des listes d'adjacence avec la convention suivante : pour tout $i \in X$, si i appartient à un circuit dans $[X, C]$, alors l'arc d'origine i dans c est placé en première position de la liste des arcs d'origine i.

Considérons donc $G = [X, Y \cup C] \in \mathcal{F}^+ \setminus G_0$. Comme $G \neq G_0$, il existe au moins un sommet de degré non nul dans G. Parmi ceux-ci, soit i_0 le sommet d'indice minimum.

Notons que C forme un nombre pair de circuits disjoints par les sommets (ce nombre pouvant éventuellement être nul).

Parcourons le graphe partiel [X, Y] à partir du sommet i_0 en utilisant les arcs de Y de la façon suivante : à partir de chaque sommet intermédiaire i rencontré, non couvert par C, on emprunte l'arc (i, j) qui, parmi tous les arcs de Y, conduit au sommet j de numéro minimum. Le cheminement s'arrête lorsqu'une des deux situations suivantes apparaît.

Cas 1 : On arrive en un sommet déjà rencontré dans le cheminement avant d'avoir rencontré un sommet couvert par C ;

Cas 2 : On arrive en un sommet k couvert par C.

Dans le premier cas, on a mis en évidence un circuit du graphe partiel [X, Y], n'ayant pas de sommet commun avec C. Soit $\Gamma \subset Y$ l'ensemble de ses arcs.
On forme alors $G' = [X, Y' \cup C']$
avec $Y' = Y \setminus \Gamma$
$C' = C \cup \Gamma$

Dans le deuxième cas, C contient un circuit passant par k et soit Γ l'ensemble de ses arcs.
Alors on forme $G' = [X, Y' \cup C']$ avec :
$Y' = Y \cup \Gamma$
$C' = C \setminus \Gamma$

Dans les deux cas, C' contient un nombre impair de circuits disjoints par les sommets. Par ailleurs, les ensembles d'arcs de G et G' étant les mêmes, on a w (G') = w (G).

Enfin, on remarque que, grâce à la convention faite sur l'ordre des arcs dans les listes d'adjacence, la même construction qui fait passer de G à G' permet de retrouver G à partir de G'. Il s'agit donc d'une bijection entre $\mathcal{F}^+ \setminus G_0$ et $\mathcal{F}^-$ ce qui achève la démonstration du Théorème 5. □

8.2. L'IDENTITE DE MAC MAHON CLASSIQUE COMME CAS PARTICULIER

Il est intéressant de vérifier que la forme généralisée (37) de l'identité de MAC MAHON inclut, comme cas particulier, la forme habituelle sur le corps des nombres réels.

Nous utiliserons pour cela le lemme suivant :

Lemme 8.2.1

Soit B une matrice n x n à coefficients réels, I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

Alors :

$$\det(I - B) = \sum_{\sigma \in Part^+(n)} \left(\prod_{i \in dom(\sigma)} b_{i,\sigma(i)} \right) - \sum_{\sigma \in Part^-(n)} \left(\prod_{i \in dom(\sigma)} b_{i,\sigma(i)} \right) \quad (39)$$

Démonstration :

Notons $C = I - B = (c_{ij})$. On a donc :

$$\begin{cases} c_{ij} = -b_{ij} & \text{si } i \neq j \\ c_{ij} = 1 - b_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors :

$$\det(I - B) = \sum_{\pi \in Per(n)} sign(\pi) \times \left(\prod_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i)} \right) \quad (40)$$

Pour une permutation quelconque $\pi \in Per(n)$ soit $U \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des indices i tels que $\pi(i) = i$ et $V = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus U$.

(40) peut se réécrire :

$$\sum_{\pi \in Per(n)} sign(\pi) \times \left(\prod_{i \in U} (1 - b_{i,i}) \right) \times \left(\prod_{i \in V} -b_{i,\pi(i)} \right)$$

En développant le produit dans chaque terme de la somme, on obtient :

$$\sum_{\pi \in Per(n)} \sum_{U' \subseteq U} sign(\pi) \times \left(\prod_{i \in U'} -b_{i,i} \right) \times \left(\prod_{i \in V} -b_{i,\pi(i)} \right)$$

Soit encore :

$$\sum_{\pi \in Per(n)} \sum_{U' \subseteq U} (-1)^{|U'|+|V|} \times sign(\pi) \times \left(\prod_{i \in U' \cup V} b_{i,\pi(i)} \right)$$

Chaque terme de la somme ci-dessus est le produit des éléments de la matrice B sur une permutation partielle σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $dom(\sigma) = U' \cup V$, avec le signe : $(-1)^{|dom(\sigma)|} \times sign(\pi) = car(\sigma)$ (noter en effet que $sign(\pi) = sign(\sigma)$).

On en déduit :

$$\det (I - B) = \sum_{\sigma\in \mathrm{Part}(n)} \mathrm{car}(\sigma) \times \left(\prod_{i\in \mathrm{dom}(\sigma)} b_{i,\sigma(i)} \right) \text{ce qui démontre (39).} \qquad \square$$

Considérons maintenant l'identité de MAC MAHON généralisée (37) qui se réécrit sur le corps des réels :

$$S \times \sum_{\sigma \in \mathrm{Part}(n)} \mathrm{car}(\sigma) \left(\prod_{i \in \mathrm{dom}(\sigma)} a_{i,\sigma(i)}\, x_{\sigma(i)} \right) = 1$$

En utilisant le lemme précédent, on voit qu'elle prend alors la forme de l'identité de MAC MAHON classique :

$S \times \det (I - B) = 1$

avec : $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = \left(a_{ij}\ x_j\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$

Remerciements

Je remercie la Direction des Etudes et Recherches d'EDF (et, en particulier, M. M. GONDRAN), pour son soutien à la recherche présentée ici.

Bibliographie

BACCELLI F., COHEN G., OLSDER G.J., QUADRAT J.P. (1992), *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems*, J. Wiley & Sons, 489 pp.

BACKHOUSE R.C., CARRÉ B.A. (1975), Regular Algebra Applied to Path Finding Problems, *Journal Inst. Math. Appl.*, 15, pp. 161-186.

BAKO A. (1974), Solution of the Multiterminal Minimal Path Problem in a Network with Gains, in *Progress in Operations Research* (A. Prekopa Ed.).

BELLMAN R.E. (1958), On a routing problem, *Quart. Appl. Math.* 16, pp 87-90.

BENZAKEN C. (1968), Structures algébriques des cheminements : pseudo-treillis, gerbiers de carré nul, in *Network and Switching Theory* (G. Biorci Ed.), Academic Press, NY, pp. 40-57.

BENZECRI J.P. (1974), *L'Analyse des Données* : Tome 1 : *Taxinomie*, Dunod, Paris.

BERGE C. (1958), *La Théorie des graphes et ses applications*, Dunod Paris.

BERGE C. (1970), *Graphes et Hypergraphes*, Dunod Paris.

BORCHARDT C.W. (1860), Uber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante, *J. Reine Angew.Math*, 57, pp. 111-121.

BOROS E., ATKIN A.O.L., CECHLÁROVÁ K., PELED U.N. (1997), Powers of Circulants in Bottleneck Algebra, *Linear Algebra and its Appl.*, 258, pp. 137-148.

BRAMS G.W. (1983), *Réseaux de Petri : Théorie et Pratique*, Masson, Paris.

BRUALDI R.A., RYSER H.J. (1991), *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, 367 pp.

BURKARD R.E. (1977), An Algebraic Approach To Assignment Problems, *Math. Programming*, 12, pp. 318-327.

BUTKOVIC P., CECHLÁROVÁ K., SZABÓ P. (1987), Strong Linear Independence in Bottleneck Algebra, *Linear Algebra and its Appl.* 94, pp. 133-155.

CARRÉ B.A. (1971), An Algebra for Network Routing Problems, *J. Inst. Math. Appl.*, 7, pp. 273-294.

CARRÉ B.A. (1971), An Algebra for Network Routing Problems, *J. Inst. Math. Appl.*, 7, pp. 273-294.

CARTIER P., FOATA D. (1969), *Problèmes Combinatoires de Commutation et Réarrangement.* Lecture Notes, in *Mathematics*, 85, Springer Verlag, Berlin.

CAYLEY A. (1854), Sur les déterminantes gauches, *Crelle's J.*, 38, pp. 93-96.

CECHLÁROVÁ K. (1992), Eigenvectors in Bottleneck Algebra, *Linear Algebra and Its Appl.* 175, pp. 63-73.

CHAIKEN S. (1982), A Combinatorial Proof of the All- Minors Matrix Theorem, *S.I.A.M. J. Algebraic and Discrete Methods* 3, pp. 319-329.

CHARNES A., RAIKE W.M. (1966), One-Pass Algorithms for Some Generalized Network Problems, *Operations Research* 14, pp. 914-923.

CHEN W.K. (1976), *Applied Graph Theory : Graphs and Electrical Networks*, North Holland.

CHRÉTIENNE P. (1983), *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse, Université Paris 6.

COHEN G., DUBOIS D., QUADRAT J.P., VIOT M. (1983), *Analyse du comportement périodique de systèmes de production par la théorie des dioïdes*, Rapport Technique 191, INRIA, Rocquencourt.

COHEN G., DUBOIS D., QUADRAT J.P., VIOT M. (1985), A Linear-System Theoretic view of Discrete Event Processes and its use for Performance Evaluation in Manufacturing, *IEEE Trans. on Autom. Control AC-30*, 3, pp. 210-220.

COHEN G., MOLLER P., QUADRAT J.P., VIOT M. (1989), Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems, *I.E.E.E. Proceedings, Special Issue on Discrete Event Systems*, 77, n° 1.

COLLOMB P., GONDRAN M. (1977), Un algorithme efficace pour l'arbre de classification, *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle*, vol. 1, pp. 31-49.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1962), Describing Industrial Processes with Inference and approximating their Steady State Behaviour, *Operational Res. Quart.* 13, pp. 95-100.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1976), Projections in a Minimax Algebra, *Math Progr.* 10, pp. 111-123.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1979), Minimax Algebra, Lecture Notes, in *Economics and Mathematical Systems* 166, Springer, New York.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1991), Algebraic Realization of Discrete Dynamical Systems, *Proceedings of the 1991 IFAC Workshop on Discrete Event System Theory and Applications in Manufacturing and Social Phenomena*, International Academic Publishers, pp. 11-15.

CUNINGHAME-GREEN R.A., MEIJER P.F.J. (1980), An Algebra for Piecewise-linear Minimax Problems, *Discrete Appl. Math.* 2, pp. 267-294.

DANTZIG G.B. (1966), All Shortest Routes in a Graph, dans *Théorie des Graphes*, Proceedings Int. Symp. Rome, Italy, Dunod, Paris, pp. 91-92.

DANTZIG G.B., BLATTNER W.O., RAO M.R. (1967), Finding a Cycle in a Graph with Minimum Cost-to-Time Ratio with Application to a Ship Routing Problem, in *Théorie des graphes*, proceedings int. symp. Rome, Italy, Dunod, Paris, pp. 209-214.

DEFAYS D. (1978), Analyse hiérarchique des Préférences et généralisations de la transitivité, *Math. Sc. Hum.*, n° 61, pp. 5-27.

DIJKSTRA E.W. (1959), A Note on Two Problems in Connection with Graphs, *Numerische Mathematik* 1, pp. 269-271.

DUBOIS D., STECKE K.E. (1990), Dynamic Analysis of Repetitive Decision - Free Discrete Event Processes : The Algebra of Timed Marked Graphs and Algorithmic Issues, *Annals of Operations Research* 26, pp. 151-193.

EILENBERG S. (1974), *Automata, Languages and Machines*, Academic Press.

FLOYD R.W. (1962), Algorithm 97 : Shortest Path, *Comm. A.C.M.* 5, p. 345.

FOATA D. (1965), *Etude algébrique de certains problèmes d'Analyse Combinatoire et du Calcul des Probabilités*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 14.

FOATA D. (1980), A Combinatorial Proof of Jacobi's Identity, *Annals Discrete Maths* 6, pp. 125-135.

FORD L.R. Jr (1956), Network Flow Theory, *The Rand Corporation*, p. 293.

GAUBERT S. (1992), *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*, Thèse, Ecole des Mines de Paris.

GAUBERT S. (1995a), Performance evaluation of (Max, +) Automata", *IEEE Trans. Automatic Control* 40 (12), pp. 2014-2025.

GAUBERT S. (1995b), Resource Optimization and (Min, +) Spectral Theory, *IEEE Trans. Automatic Control* 40 (12), pp. 1931-1934.

GAUBERT S., MAIRESSE J. (1998), Modeling and Analysis of Timed Petri Nets using Heaps of Pieces, *IEEE Trans. Automatic Control*, à paraître.

GAUBERT S., BUTKOVIC P., CUNINGHAME-GREEN R. (1998), Minimal (Max, +) Realizations of Convex Sequences, *SIAM Journal Control Optim.* 36, 1, pp. 137-147.

GONDRAN M. (1974), Algèbre linéaire et Cheminement dans un Graphe, *R.A.I.R.O.*, vol. 1, pp. 77-99.

GONDRAN M. (1975), Path Algebra and Algorithms, in *Combinatorial Programming : Methods and Applications* (B. Roy Ed.) D. Reidel Publish Co., pp. 137-148.

GONDRAN M. (1976a), Valeurs Propres et Vecteurs Propres en Classification Hiérarchique, *R.A.I.R.O. Informatique Théorique*, 10, 3, pp. 39-46.

GONDRAN M. (1976b), *Des algèbres de chemins très générales : les semi-anneaux à gauche et à droite*, Note interne EDF 2194/02, non publié.

GONDRAN M. (1995), Valeurs Propres et Vecteurs Propres en Analyse des Préférences ou Trois solutions du paradoxe de Condorcet, Note EDF HI-00/95-001.

GONDRAN M., MINOUX M. (1977), Valeurs propres et Vecteurs propres dans les Dioïdes et leur Interprétation en Théorie des Graphes, *Bull. Dir. Et. Rech. EDF*, Série C, pp. 24-41.

GONDRAN M., MINOUX M. (1978), L'indépendance linéaire dans les Dioïdes, *Bull. Dir. Et. Rech. EDF*, Série C, n° 1, pp. 67-90.

GONDRAN M., MINOUX M. (1979), *Graphes et Algorithmes*, Eyrolles, Paris, 3e édition revue et augmentée 19950.

GONDRAN M., MINOUX M. (1979), Valeurs propres et Vecteurs propres en Théorie des graphes, Colloques Internationaux, CNRS Paris 1978, pp. 181-183. *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems* 166, Springer Verlag, Berlin.

GONDRAN M., MINOUX M. (1984), Linear Algebra in Dioïds. A survey of recent results, in *Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research* (BURKARD R.E., CUNINGHAME-GREEN R.A., ZIMMERMANN U. Editors), *Annals of Discrete Mathematics* 19, pp. 147-164.

GRAHAM S.L., WEGMAN M. (1976), A Fast and Usually Linear Algorithm for Global Flow Analysis, *Journal ACM*, 23, 1, pp. 172-202.

GUNAWARDENA J. (1998), *Idempotency*, Publications of the Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

HALPERN J., PRIESS I. (1974), Shortest Paths with Time Constraints on Movement and Parking, *Networks*, 4, pp. 241-253.

HAMMER P.L., RUDEANU S. (1968), *Boolean Methods in Operations Research*, Springer Verlag.

HOFFMAN A.J. (1963), On Abstract dual Linear Programs, *Naval Research Logistics Quarterly* 10, pp. 369-373.

HU T.C. (1961), The Maximum Capacity Route Problem, *Operations Research* 9, pp. 898-900.

HU T.C. (1967), Revised Matrix Algorithms for Shortest Paths, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, 15, 1, pp. 207-218.

KAILATH T. (1980), *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

KARP R.M. (1978), A Characterization of the minimum cycle mean in a digraph, *Discrete Mathematics* 23, pp. 309-311.

KAUFMANN A., MALGRANGE Y. (1963), Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe, *R.I.R.O.*, 26, pp. 61-73.

KLEENE S.C. (1956), "Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata" in *Automata Studies* (Shannon & Mc Carthy Editors), Princeton University Press, pp. 3-40.

KUNTZMANN J. (1972), *Théorie des Réseaux*, Dunod, Paris.

LALLEMENT G. (1979), *Semigroups and Combinatorial Applications*, J. Wiley & Sons.

LAUE H. (1988), A Graph Theoretic proof of the fundamental trace identity, *Discrete Math* 69, pp. 197-198.

LAWLER E.L. (1967), Optimal Cycles in doubly Weighted Directed Linear Graphs, in *Théorie des Graphes*, Proc. Int. Symp., Rome, Italy, (1966), Dunod, Paris, pp. 209-213.

LEHMANN D.J. (1977), Algebraic Structures for Transitive Closure, *Theor. Comput. Sc.*, 4, pp. 59-76.

MACMAHON P.A. (1915), *Combinatory Analysis*, Cambridge University Press et Chelsea Publishing Co., New York, 1960.

MINIEKA E., SHIER D.R. (1973), A Note on an Algebra for the k Best Routes in a Network, *J. Inst. Math. Appl.*, 11, pp. 145-149.

MINOUX M. (1975), Plus courts chemins avec contraintes, *Annales des Télécommunications* 30, n° 11-12, pp. 383-394.

MINOUX M. (1976), Structures algébriques généralisées des problèmes de cheminement dans les graphes : Théorèmes, Algorithmes et Applications, *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle*, vol. 10, n° 6, pp. 33-62.

MINOUX M. (1977), Generalized Path Algebras, in *Surveys of Mathematical Programming* (A. PREKOPA Editor) Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, pp. 359-364.

MINOUX M. (1982), *Linear Dependence and Independence in Lattice Dioïds*, Note interne C.N.E.T. non publiée.

MINOUX M. (1997), Bideterminants, Arborescences and Extension of the Matrix-Tree Theorem to Semirings, *Discrete Mathematics,* 171, pp. 191-200.

MINOUX M. (1998), A Generalization of the All Minors Matrix Tree Theorem to Semirings. *Discrete Mathematics* (to appear).

MOLLER P. (1987), *Notions de rang dans les dioïdes vectoriels*, Actes de la Conférence "Algèbres exotiques et systèmes à événements discrets" C.N.E.T., 3-4 juin 1987.

OLSDER G.J., ROOS C. (1988), Cramer and Cayley-Hamilton in the Max-Algebra, *Linear Algebra and its Applications*, 101, pp. 87-108.

ORLIN J.B. (1978), Line Digraphs, Arborescences and Theorems of Tutte and Knuth, *Journal Combinatorial Theory*, B, 25, pp. 187-198.

PERTERSON J.L. (1981), *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice Hall, 290 pp.

REUTENAUER C., STRAUBING H. (1984), Inversion of Matrices over a Commutative Semiring, *J. of Algebra*, 88, n° 2, pp. 350-360.

ROBERT F., FERLAND J. (1968), Généralisation de l'algorithme de Warshall, *R.I.R.O.* 7, pp. 71-85.

ROTE G. (1990), Path Problems in Graphs, *Computing Suppl.* 7, pp. 155-189.

ROY B. (1975), Chemins et Circuits : Enumérations et Optimisation, in *Combinatorial Programming : Methods and Applications* D. Reidel, Boston, pp. 105-136.

RUTHERFORD D.E. (1964), The Cayley-Hamilton Theorem for Semirings, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sec.* A, 66, pp. 211-215.

SALOMAA A. (1969), *Theory of Automata,* Pergamon Press, Oxford.

SIMON I. (1994), On Semigroups of Matrices over the Tropical Semiring, *Informatique Théorique et Appl.* vol. 28, n° 3-4, pp. 277-294.

STRAUBING H. (1983), A Combinatorial proof of the Cayley-Hamilton Theorem, *Discrete Mathematics* 43, pp. 273-279.

TARJAN R.E. (1981), A Unified Approach to Path Problems, *J. A.C.M.*, vol 28, n° 3, pp. 577-593.

TUTTE W.T. (1948), The dissection of equilateral Triangles into equilateral Triangles, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 44, pp. 463-482.

WAGNEUR E. (1991), Moduloïds and Pseudomodules 1. Dimension Theory, *Discrete Mathematics* 98, pp. 57-73.

WARSHALL S. (1962), A Theorem on Boolean Matrices, *Journal A.C.M.* 9, p. 11.

WONGSEELASHOTE A. (1976), An Algebra for Determining all Path Values in a Network with Application to K-Shortest-Paths Problems, *Networks*, 6, pp. 307-334.

WONGSEELASHOTE A. (1979), Semirings and Path Spaces, *Discrete Mathematics* 26, pp. 55-78.

ZEILBERGER D. (1985), A Combinatorial Approach to Matrix Algebra, *Discrete Mathematics* 56, pp. 61-72.

ZIMMERMANN U. (1981), Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures, *Annals of Discrete Mathematics* 10.