RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES DANS LES SEMI-ANNEAUX ET LES DIOÏDES

M. MINOUX
LIP 6, Université Paris 6

Résumé

La plupart des algorithmes classiques de résolution de systèmes linéaires dans l'algèbre usuelle peut se transposer à des structures algébriques beaucoup plus générales telles que les semi-anneaux et les dioïdes. Nous présentons ici une synthèse de ces extensions : méthodes itératives de JACOBI, et de GAUSS-SEIDEL généralisées ; méthodes d'élimination de GAUSS-JORDAN et "Escalier" généralisées, algorithme "glouton" généralisé. Pour le cas particulier du problème de plus court chemin dans un graphe, on retrouve ainsi de nombreux algorithmes connus : algorithmes de FORD-BELLMANN, algorithme de FLOYD, algorithme de DANTZIG et algorithme de DIJKSTRA.

Mots clés : Semi-anneaux, dioïdes, systèmes linéaires.

ALGORITHMS FOR LINEAR SYSTEMS OVER SEMI-RINGS AND DIOIDS

Abstract

Many classical algorithms for solving linear systems in usual algebra may be extended to much more general algebraic structures such as semi-rings and dioids. We present here a synthetic overview of these extensions : iterative methods such as generalized JACOBI and GAUSS-SEIDEL algorithms ; elimination methods such as generalized GAUSS-JORDAN and "Escalator" algorithms ; generalized "greedy" algorithm. As interesting special cases, we find again various well-known algorithms for solving the shortest path problem on directed graphs : the FORD-BELLMANN algorithm, FLOYD'S and DANTZIG's algorithm, and DIJKSTRA's algorithm.

Keywords : Semi-rings, dioids, linear systems.

1. INTRODUCTION

Soit A = (a_{ij}) une matrice n x n à coefficients dans un semi-anneau (E, ⊕, ⊗) et $b \in E^n$ un vecteur de dimension n donné.

On étudie dans ce rapport la résolution de systèmes linéaires de la forme :

$$y = y \otimes A \oplus b^T \qquad (1)$$

ou

$$z = A \otimes z \oplus b \qquad (2)$$

où on note $y \otimes A$ le vecteur - ligne dont la composante j est :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \otimes a_{ij}$$

et $A \otimes z$ le vecteur - colonne dont la composante i est :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes z_j$$

(les sommations ci-dessus s'entendent au sens de ⊕)

En considérant la matrice A comme la matrice d'incidence généralisée d'un graphe associé G(A), nous montrerons dans le § 3 que l'on peut interpréter les puissances successives de A et la quasi-inverse A^* de A en termes de chemins de G (A).

Dans le cas où (E, ⊕, ⊗) est un dioïde, on montrera de plus que la quasi-inverse A^* permet de déterminer les solutions *minimales* de (1) et (2), lesquelles pourront souvent être interprétées comme solutions de problèmes de cheminement associés sur G(A).

Les algorithmes généraux de résolution des systèmes linéaires de type (1) ou (2) font l'objet des paragraphes 4 et 5 : les méthodes itératives dans le §4 et les méthodes "directes" dans le § 5. Un panorama des applications à la modélisation et à la résolution de nombreux problèmes de cheminement dans les graphes est ensuite présenté dans le §6.

Le terme de ***dioïde*** a été initialement proposé par J. KUNTZMANN (1972) pour désigner la structure algébrique constituée par un ensemble E muni de deux lois de composition internes ⊕ et ⊗ telles que (E, ⊕) est un monoïde commutatif, (E, ⊗) est un monoïde (non nécessairement commutatif) avec une propriété de distributivité à droite et à gauche de ⊗ par rapport à ⊕. En l'absence de propriétés additionnelles des lois ⊕ et ⊗, une telle structure est assez pauvre et nous lui donnerons ici le nom de ***pré-semi-anneau***, réservant ainsi le nom de ***dioïde*** à des structures à deux lois munies de propriétés supplémentaires qui seront explicitées plus loin.

Définition

On appelle *pré-semi-anneau à droite* une structure algébrique (E, ⊕, ⊗) formée d'un ensemble de base E et de deux lois de composition internes avec les propriétés suivantes :

(i) $a \oplus b = b \oplus a$ $\quad \forall\ a, b \in E$ (commutativité de ⊕)

(ii) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ $\quad \forall\ a, b, c \in E$ (associativité de ⊕)

(iii) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ $\quad \forall\ a, b, c \in E$ (associativité de ⊗)

(iv) $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ $\quad \forall\ a, b, c \in E$
(distributivité à droite de ⊗ relativement à ⊕)

La notion de *pré-semi-anneau à gauche* est définie de façon analogue, en remplaçant la distributivité à droite par la distributivité à gauche :

(iv)' $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ $\quad \forall\ a, b, c \in E$.

Notons que dans les définitions ci-dessus, on ne suppose pas l'existence d'éléments neutres. S'ils n'existent pas (ni à droite, ni à gauche), on peut les ajouter sans problème. Dans le cas où ε, l'élément neutre ajouté à ⊕, est absorbant par ⊗, on a une structure de semi-anneau.

Définition

On appelle *pré-semi-anneau* une structure algébrique (E, ⊕, ⊗) qui est à la fois un pré-semi-anneau à droite et un pré-semi-anneau à gauche.

Définition

La relation de pré-ordre induite par la loi ⊕ est définie par : $a \leq b$, si et seulement si il existe c tel que $b = a \oplus c$. Lorsque cette relation est une relation d'ordre, on dit que l'ensemble (E, ⊕) est *canoniquement ordonné* relativement à ⊕.

Définition

On appelle pré-dioïde à droite (resp : à gauche) un pré-semi-anneau à droite (resp : à gauche) canoniquement ordonné relativement à ⊕.
On appelle pré-dioïde un pré-semi-anneau canoniquement ordonné relativement à ⊕.

Définition (semi-anneau, semi-anneau à droite, à gauche)

Un *semi-anneau* est un pré-semi-anneau (E, $\oplus$, $\otimes$) qui vérifie les propriétés additionnelles suivantes :

(i) $\oplus$ admet un élément neutre ε

(ii) $\otimes$ admet un élément neutre e

(iii) ε est absorbant pour $\otimes$, c'est-à-dire :

$\forall\, a \in E : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$

Un semi-anneau à droite (resp : à gauche) est un pré-semi-anneau à droite (resp : à gauche) vérifiant les propriétés (i) à (iii) ci-dessus.
Un semi-anneau dans lequel l'opération $\otimes$ est commutative est dit *commutatif.*

Définition (anneau)

On appelle *Anneau* un semi-anneau dans lequel l'ensemble de base E a une structure de *groupe* commutatif pour l'addition $\oplus$. Un anneau (E, $\oplus$, $\otimes$) est dit *commutatif* si l'opération $\otimes$ est commutative.

Un cas particulier important de la structure d'anneau est évidemment la structure de ***corps*** dans laquelle l'ensemble de base E a une structure de groupe (non nécessairement commutatif) relativement à la loi $\otimes$. Lorsque $\otimes$ est commutative, on parle de corps commutatif.

Définition (dioïde, dioïde à droite, dioïde à gauche)

On appelle ***dioïde*** un ensemble (E, $\oplus$, $\otimes$) muni de deux lois de composition internes $\oplus$ et $\otimes$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) (E, $\oplus$) est un monoïde commutatif avec élément neutre ε ;

(ii) (E, $\otimes$) est un monoïde avec élément neutre e ;

(iii) La relation de préordre canonique relativement à $\oplus$ (définie par $a \le b \Leftrightarrow \exists\, c : b = a \oplus c$) est une *relation d'ordre*, c'est-à-dire vérifie : $a \le b$ et $b \le a \Rightarrow a = b$

(iv) ε est absorbant pour $\otimes$, c'est-à-dire : $\forall\, a \in E : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$

(v) $\otimes$ est distributive à droite et à gauche, relativement à $\oplus$;

On appelle dioïde à droite (resp : à gauche) un ensemble (E, $\oplus$, $\otimes$) vérifiant les propriétés (i) à (iv) ci-dessus et où $\otimes$ est seulement distributive à droite (resp : à gauche) relativement à $\oplus$.

La différence fondamentale entre un anneau et un dioïde réside dans la propriété (iii). ***Dans un anneau, l'addition induit une structure de groupe, tandis que dans un dioïde, elle induit une structure de monoïde canoniquement ordonné.*** Notons que cela implique ***une disjonction entre la classe des anneaux et la classe des dioïdes.***

Exemple

$\mathbb{Z}$ muni des opérations + et x usuelles, est un *anneau* mais *ce n'est pas un dioïde*.
En effet, dans cette structure, on a toujours, pour tout couple d'entiers relatifs a, b :
$a \leq b$ et $b \leq a$ pour la relation de préordre canonique ($a \leq b \Leftrightarrow \exists\, c : b = a + c$)
Ce n'est donc pas une relation d'ordre. Par contre, le semi-anneau $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels) est un dioïde car la relation de préordre canonique coïncide avec la relation d'ordre (total) habituelle. ||

C'est donc la présence d'une relation d'ordre intrinsèquement liée à la loi addition ⊕ qui constitue la principale distinction entre anneaux et dioïdes. Cette relation d'ordre conduira naturellement à définir des propriétés topologiques.

Définition (Dioïde idempotent)

On appelle *dioïde idempotent* un dioïde dans lequel l'addition ⊕ est commutative et idempotente.
Un cas particulier fréquemment rencontré est celui où l'addition ⊕ est non seulement idempotente, mais *sélective* (c.à.d. : $\forall$ a, b $\in$ E : $a \oplus b = a$ ou b).

Définition (Dioïde sélectif)

On appelle *dioïde sélectif* un dioïde dans lequel l'addition ⊕ est commutative et sélective.
Les dioïdes idempotents forment une classe particulièrement riche de dioïdes qui contient de nombreuses sous-classes, en particulier :
- les dioïdes double-idempotents et les treillis distributifs ;
- les dioïdes double sélectifs ;
- les dioïdes idempotents-groupes et les dioïdes sélectifs-groupes.

Définition

On appelle *dioïde idempotent-groupe* un dioïde $(E, \oplus, \otimes)$ qui a une structure de monoïde commutatif idempotent pour $\oplus$ et une structure de groupe pour $\otimes$. (tout élément de $E \setminus \{\varepsilon\}$ ayant un inverse pour $\otimes$).
Un cas particulier important pour les applications est celui où l'opération $\oplus$ est *sélective*.

Définition

On appelle *dioïde sélectif-groupe* un dioïde $(E, \oplus, \otimes)$ qui a une structure de monoïde sélectif pour $\oplus$ et une structure de groupe pour $\otimes$. (tout élément de $E \setminus \{\varepsilon\}$ ayant un inverse pour $\otimes$).

Exemple Dioïde "Min-Plus"

Prenons pour E l'ensemble des réels $\hat{\mathrm{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et définissons les opérations $\oplus$ et $\otimes$ par :
$\forall$ a, b $\in$ E : $a \oplus b = \text{Min}\,\{a, b\}$
$\forall$ a, b $\in$ E : $a \otimes b = a + b$ (addition des réels)
$(E, \oplus)$ est un monoïde sélectif avec, pour élément neutre, $\varepsilon = +\infty$, et $(E, \otimes)$ un groupe avec élément neutre $e = 0$.
La structure $(E, \oplus, \otimes)$ ci-dessus est donc un dioïde sélectif-groupe.

Notons que, dans la terminologie de la théorie des langages et des automates, des dioïdes sélectifs-groupes tels que Min-Plus ou Max-Plus correspondent à la notion de semi-anneau *Tropical* (cf. par ex. SIMON 1994). ||

2. PROBLEME DU PLUS COURT CHEMIN ET RÉSOLUTION DE SYSTÈME LINÉAIRE DANS UN DIOÏDE

Un exemple typique de problème de cheminement dans les graphes qui peut se formuler comme la résolution d'un système de type (1) ou (2) est la détermination des *plus courts chemins d'origine fixée dans un graphe orienté valué*.
Considérons un graphe orienté $G = [X, U]$ dont les sommets sont numérotés 1, 2,... n, et dans lequel chaque arc (i, j) est muni d'une longueur $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Etant donné un sommet

$i_o \in X$ choisi comme origine, on recherche les longueurs y_j (j = 1... n) des plus courts chemins entre le sommet i_o et les autres sommets j du graphe.

Il n'est pas restrictif de supposer que G est un 1-graphe, c'est-à-dire que, pour tout couple ordonné de sommets (i, j), il existe au plus un arc de la forme (i, j). (En effet si U contient plusieurs arcs $u_1, u_2, \ldots u_p$ de la forme (i, j) et de longueurs $\ell(u_1), \ell(u_2), \ldots \ell(u_p)$ il suffit, pour résoudre le problème du plus court chemin, de considérer qu'il existe un seul arc (i, j) de longueur $a_{ij} = \underset{k=1,\ldots p}{\mathrm{Min}} \{\ell(u_k)\}$ et d'éliminer tous les autres arcs).

2.1. LE SYSTÈME LINÉAIRE ASSOCIÉ AU PLUS COURT CHEMIN

D'après le principe, bien connu, de la programmation dynamique (BELLMAN 1954, 1958), on sait que les valeurs y_i vérifient les équations (dites "d'optimalité") suivantes :

$$\begin{cases} y_{i_o} = 0 \\ \forall j \neq i_o : \quad y_j = \underset{i \in \Gamma_j^{-1}}{\mathrm{Min}} \{y_i + a_{ij}\} \end{cases}$$

où $\Gamma_j^{-1} = \{i \,/\, (i,j) \in U\}$ est l'ensemble des prédécesseurs directs du sommet j dans G.

En convenant de poser $a_{ij} = +\infty$ si l'arc (i, j) n'existe pas et $a_{ii} = 0$ ($\forall i = 1, \ldots n$) les relations précédentes peuvent se réécrire :

$$\begin{cases} y_{i_o} = 0 \\ \forall j \neq i_o : \quad y_j = \underset{i=1\ldots n}{\mathrm{Min}} \{y_i + a_{ij}\} \end{cases}$$

En supposant, pour simplifier, que les longueurs a_{ij} sont toutes positives ou nulles, on doit avoir $y_j \geq 0$ ($\forall j = 1\ldots n$) et par suite les relations précédentes se réécrivent encore :

$$\begin{cases} y_{i_o} = \mathrm{Min}\left\{ \underset{i=1\ldots n}{\mathrm{Min}} \{y_i + a_{ii_o}\} ; 0 \right\} \\ \text{et, } \forall j \neq i_o : \\ y_j = \mathrm{Min}\left\{ \underset{i=1\ldots n}{\mathrm{Min}} \{y_i + a_{ij}\} ; +\infty \right\} \end{cases}$$

Considérons alors le dioïde $(E, \oplus, \otimes)$ où $E = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et où les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont définies par :

$\forall a \in E, \forall b \in E$:

$a \oplus b = \mathrm{Min}\,\{a, b\}$

$a \otimes b = a + b$

$\varepsilon = +\infty$ est l'élément neutre de $\oplus$ et $e = 0$ est l'élément neutre de $\otimes$

On remarque alors que les relations ci-dessus peuvent s'écrire sous la forme du système linéaire :

$$\begin{cases} y_{i_o} = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes a_{i,i_o} \oplus e \\ y_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes a_{i,j} \oplus \varepsilon \qquad \text{pour tout } j \neq i_o \end{cases}$$

soit, en notation matricielle :

$$y = y \otimes A \oplus b^T \tag{1}$$

où A désigne la matrice $\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}}$ et b le n-vecteur défini par :

$b_{i_o} = e$ et, $\forall\, j \neq i_o : b_j = \varepsilon$.

On voit ainsi que rechercher le vecteur y dont les composantes sont les longueurs des plus courts chemins d'origine i_o revient à résoudre le système linéaire (1) dans le dioïde $(E, \oplus, \otimes)$.

2.2. ALGORITHME DE BELLMAN - LIEN AVEC LA MÉTHODE DE JACOBI

Comme nous le verrons dans les paragraphes 4 et 5 du présent rapport, la plupart des algorithmes de résolution du problème du plus court chemin peuvent s'interpréter comme des variantes de méthodes connues en algèbre linéaire classique.

Ainsi, par exemple, l'algorithme de Bellman (1958) qui consiste à partir de y^o défini par :

$$y_{i_o}^o = 0, \quad y_j^o = +\infty \quad (\forall\, j \neq i_o)$$

puis à effectuer itérativement les calculs suivants :

$$\begin{cases} y_{i_o}^{t+1} = 0 \\ y_j^{t+1} = \underset{i \in \Gamma_j^{-1}}{\mathrm{Min}} \left\{ y_i^t + a_{ij} \right\} \end{cases}$$

En utilisant le système (1) cet algorithme peut se mettre sous la forme équivalente :

$$\begin{cases} y^o = b & (3) \\ y^{t+1} = y^t \otimes A \oplus b & (4) \end{cases}$$

où l'on reconnaît l'analogue de la *méthode de Jacobi* en algèbre linéaire classique.
De (3) et (4) on déduit, pour t entier > 0 quelconque :
$y^t = b \otimes (I \oplus A \oplus A^2 \oplus ... \oplus A^t)$

où $I = \begin{bmatrix} e & & & \\ & e & & \varepsilon \\ & & \cdot & \\ & \varepsilon & & \cdot \\ & & & & e \end{bmatrix}$ est la matrice identité de M_n (E).

La convergence de l'algorithme de Bellman est donc liée à la convergence de la série $I \oplus A \oplus A^2 \oplus ... \oplus A^t \oplus ...$

2.3. LA NOTION DE QUASI-INVERSE D'UNE MATRICE

Il est bien connu que l'algorithme de Bellman converge en au plus n-1 itérations, autrement dit que y^{n-1} est le vecteur des longueurs des plus courts chemins, si et seulement si le graphe ne contient pas de circuit de longueur strictement négative. Sous ces conditions, nous verrons (cf théorème 1 § 3.3) que la série $A^{(k)} = I \oplus A \oplus A^2 \oplus ... \oplus A^k$ converge en n-1 étapes au plus, c'est-à-dire que $A^{(n-1)} = A^{(n)} = A^{(n+1)} = ...$ et la limite de cette série notée A^* sera appelée la *quasi-inverse* de la matrice A.
L'algorithme de Bellman converge alors vers $y = b \otimes A^*$.

On vérifie que $b \otimes A^*$ est bien d'une solution de (1) car :
$b \otimes A^* \otimes A \oplus b = b \otimes (A^* \otimes A \oplus I)$
Or, si $A^* = A^{(n-1)}$, on a :
$A^* \otimes A \oplus I = A^{(n)} = A^{(n-1)} = A^*$
On en déduit donc bien :
$b \otimes A^* = (b \otimes A^*) \otimes A \oplus b$

Nous allons voir maintenant que la solution $b \otimes A^*$ fournie par l'algorithme de Bellman-Jacobi n'est pas une solution quelconque de (1).

2.4. MINIMALITÉ DE LA SOLUTION DE BELLMAN-JACOBI

En utilisant le fait que $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \text{Min}, +)$ est un *dioïde* (c.a.d un semi-anneau canoniquement ordonné) montrons que $b \otimes A^*$ est *la solution minimale* du système linéaire (1).

En effet soit y une solution quelconque de $y = y \otimes A \oplus b$
On peut écrire :

$$\begin{aligned} y &= y \otimes A \oplus b \\ &= (y \otimes A \oplus b) \otimes A \oplus b \\ &= y \otimes A^2 \oplus b \otimes (I \oplus A) \end{aligned}$$

En reportant l'expression ci-dessus de y dans (1) on obtient de même :
$y = y \otimes A^3 \oplus b \otimes (I \oplus A \oplus A^2)$
En réitérant l'argument, on obtient pour tout $k \geq 2$:
$y = y \otimes A^k \oplus b \otimes A^{(k-1)}$

Ainsi pour $k \geq n$, on a :
$y = y \otimes A^k \oplus b \otimes A^*$

En notant $\leq$ la relation d'ordre canonique du dioïde $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \text{Min}, +)$ ce résultat montre que $b \otimes A^* \leq y$, et ce, pour toute solution y de (1). $b \otimes A^*$ est donc bien *la solution minimale de (1).*

Pour le problème du plus court chemin (ainsi que pour de nombreux autres problèmes de cheminement dans les graphes, voir § 6 ci-après), il ne s'agit pas seulement de trouver une solution quelconque de (1) ou (2) mais la *solution minimale*.

L'exemple de la Figure 1 illustre le fait qu'une solution non minimale de (1) n'est pas pertinente vis-à-vis du problème de plus court chemin (par convention les arcs du graphe complet non représentés ont une longueur $+\infty$). Le vecteur $y = (0, 1, 1, 1)$ est solution du système (1). En effet on vérifie que l'on a bien :

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{Min}\, \{y_1 + a_{11}, y_2 + a_{21}, y_3 + a_{31}, y_4 + a_{41}, 0\} \\ y_2 &= \text{Min}\, \{y_1 + a_{12}, y_2 + a_{22}, y_3 + a_{32}, y_4 + a_{42}, +\infty\} \\ y_3 &= \text{Min}\, \{y_1 + a_{13}, y_2 + a_{23}, y_3 + a_{33}, y_4 + a_{43}, +\infty\} \\ y_4 &= \text{Min}\, \{y_1 + a_{14}, y_2 + a_{24}, y_3 + a_{34}, y_4 + a_{44}, +\infty\} \end{aligned}$$

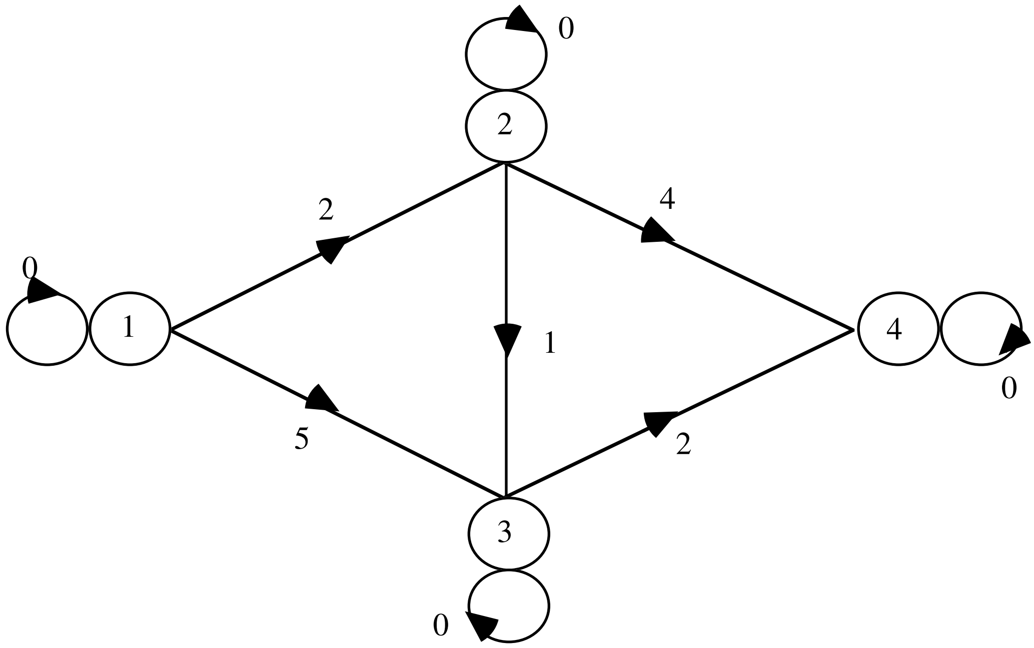

***Figure 1* :** exemple d'un graphe orienté sur lequel on recherche les longueurs des plus courts chemins d'origine 1. Le vecteur y = (0, 1, 1, 1) est solution du système (1), mais n'est pas solution du problème de plus court chemin d'origine 1 car ce *n'est pas la solution minimale de (1).*

Cependant on remarque que les composantes de y n'ont rien à voir avec les longueurs des plus courts chemins d'origine 1 dans le graphe de la figure 1. Seule la solution minimale (0, 2, 3, 5) du système (1) a pour composantes les longueurs des plus courts chemins cherchés.

3. QUASI-INVERSE D'UNE MATRICE A ELEMENTS DANS UN SEMI-ANNEAU - EXISTENCE ET PROPRIETES

3.1. DÉFINITIONS

Soit $A \in M_n(E)$ une matrice carrée n x n à éléments dans un semi-anneau $(E, \oplus, \otimes)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, désignons par A^k la puissance $k^{\text{ième}}$ de A, c'est-à-dire $A \otimes A \otimes ... \otimes A$ (k fois) et définissons les matrices $A^{(k)}$ par :

$A^{(k)} = I \oplus A \otimes A^2 \oplus .... \oplus A^k$

où $I = \begin{bmatrix} e & & & & \\ & e & & \varepsilon & \\ & & \cdot & & \\ & \varepsilon & & \cdot & \\ & & & & e \end{bmatrix}$ est la matrice identité de M_n (E).

Remarquons que, dans le cas particulier où l'opération $\oplus$ est *idempotente*, le résultat suivant donne une autre expression de $A^{(k)}$ en fonction de $A' = I \oplus A$

Proposition 3.1.1
Si l'opération $\oplus$ est idempotente, alors $A^{(k)} = (I \oplus A)^k$

Démonstration

Le développement de $(I \oplus A)^k$ donne $(I \oplus A)^k = I \oplus \sum_{r=1}^{k} C_k^r \, A^r$

où la somme s'entend au sens de $\oplus$ et où $C_k^r \, A^r$ dénote la somme $A^r \oplus A^r \oplus ... \oplus A^r$ C_k^r fois $\left(C_k^r = \dfrac{k!}{r!\,(k-r)!} \right)$. Comme $\oplus$ est idempotente on a donc $C_k^r \, A^r = A^r$ et la proposition s'en déduit. □

Définition 3.1.2 (Quasi-inverse d'une matrice)
On appelle quasi-inverse de $A \in M_n$ (E), notée A^*, la limite, lorsqu'elle existe, de la suite des matrices $A^{(k)}$ lorsque $k \to \infty$:

$$A^* = \lim_{k \to \infty} A^{(k)}$$

Nous allons étudier des conditions suffisantes d'existence de la matrice A^*. Ces conditions feront intervenir l'interprétation des matrices A^k et $A^{(k)}$ en termes de chemins du graphe G(A) associé à la matrice A.

3.2. GRAPHE ASSOCIÉ À UNE MATRICE. MATRICE D'ADJACENCE GÉNÉRALISÉE ET PROPRIÉTÉS

Soit $A \in M_n$ (E) une matrice carrée n x n à coefficients dans E. On définit le graphe G(A) associé à A de la façon suivante :

- l'ensemble des sommets de G(A) est {1, 2,... n} l'ensemble des indices des lignes (ou des colonnes) de A ;
- l'ensemble des arcs de G(A) est l'ensemble des couples ordonnés (i, j) correspondant aux termes a_{ij} de A distincts de ε (l'élément neutre de $\oplus$). Si A contient un terme diagonal $a_{ii} \neq \varepsilon$, alors G(A) contient un arc (i, i) encore appelé une *boucle*.

Remarquons que le graphe G(A) ainsi défini est un graphe *valué* : à chaque arc (i, j) se trouve associée la valeur $a_{ij} \in E$ ($a_{ij} \neq \varepsilon$) du terme correspondant de la matrice A. Inversement, la matrice A peut être considérée comme la *matrice d'adjacence* (généralisée) du graphe valué G(A).

La propriété 3.2.1 ci-dessous est à la base des développements qui vont suivre, et permet d'interpréter les coefficients des matrices A^k et $A^{(k)}$ en termes de *chemins* et de *circuits* du graphe associé G(A).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons :

- P_{ij}^{k} l'ensemble des chemins de G(A) (non nécessairement élémentaires) joignant le sommet i au sommet j et comportant *exactement* k arcs ;
- $P_{ij}^{(k)}$ l'ensemble des chemins de G(A) (non nécessairement élémentaires) joignant le sommet i au sommet j et comportant *au plus* k arcs.

Par ailleurs, à tout chemin $\mu \in P_{ij}^{k}$, composé de la suite des sommets $i_o, i_1, i_2, \ldots i_{k-1}, i_k$ (avec $i_0 = i$ et $i_k = j$), associons son *poids* $w(\mu) = a_{i_o, i_1} \otimes a_{i_1, i_2} \otimes \ldots \otimes a_{i_{k-1}, i_k}$
On peut alors énoncer :

Propriété 3.2.1

(i) Chaque terme (i, j) de la matrice A^k est égal à la somme des poids des chemins de P_{ij}^{k} :

$$\left(A^{k}\right)_{ij} = \sum_{\mu \in P_{ij}^{k}} w(\mu) \qquad (5)$$

(ii) Chaque terme (i, j) de la matrice $A^{(k)}$ est égal à la somme des poids des chemins de $P_{ij}^{(k)}$:

$$(A^{k})_{ij} = \sum_{\mu \in P_{ij}^{(k)}} w(\mu) \qquad (6)$$

Démonstration

Elle se fait aisément par induction sur k, en tenant compte que ε est absorbant pour la multiplication ⊗, et que celle-ci est distributive par rapport à l'addition. □

Les chemins appartenant à P_{ij}^{k} ou à $P_{ij}^{(k)}$ ne sont pas nécessairement élémentaires, c'est-à-dire peuvent contenir des circuits. Dans le cas général où la multiplication $\otimes$ n'est pas commutative, le poids d'un circuit γ passant successivement par les sommets i_1, i_2,... i_k, i_1 dépend de la façon dont il est parcouru. Ainsi, si le sommet de départ est i_1 le poids du circuit est défini par :

$$a_{i_1 i_2} \otimes a_{i_3 i_4} \otimes ... \otimes a_{i_k, i_1}$$

si le sommet de départ est i_2, le poids est défini par :

$$a_{i_2 i_3} \otimes a_{i_3 i_4} \otimes .... \otimes a_{i_k, i_1} \otimes a_{i_1 i_2}$$

et ces deux quantités peuvent être différentes. On est ainsi conduit à introduire la notion de *circuit pointé*.

Définition 3.2.2 (notion de circuit pointé)

On appelle *circuit pointé* de G(A) la donnée d'un circuit de G(A) et d'un sommet particulier de ce circuit pris comme origine du parcours du circuit. Le poids du circuit pointé $\gamma = \{i_1\ i_2,...\ i_k,\ i_1\}$ d'origine i_1 est :

$$w(\gamma) = a_{i_1 i_2} \otimes a_{i_2 i_3} \otimes ... \otimes a_{i_k, i_1}$$

Ainsi à un circuit de G composé de k sommets, on fait correspondre k *circuits pointés*. Chacun de ces circuits pointés peut donc avoir un poids différent. Dans le cas où la multiplication est *commutative*, tous les circuits pointés d'un même circuit ont le même poids et la notion de circuit pointé n'est pas nécessaire.

On dira qu'un graphe G est *sans circuit p-absorbant* si le poids de chacun des circuits pointés du graphe G est *un élément p-stable de E.* (a $\in$ E est dit p-stable si et seulement si $a^{(p)} = a^{(p+1)} = ...$, où, $\forall\ k \in \mathbb{N} : a^{(k)} = e \oplus a \oplus a^2 \oplus ... \oplus a^k$). La Propriété 3.2.1 devient alors :

Propriété 3.2.3

Si G(A) est sans circuit p-absorbant, alors :

$$\left(A^{(k)}\right)_{ij} = \sum_{\mu} w(\mu) \qquad (7)$$

où la sommation s'étend à l'ensemble des chemins de i à j comportant au plus k arcs et n'empruntant pas plus de p fois successivement chaque circuit pointé de G(A).

Démonstration :

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que tout chemin empruntant successivement plus de p fois un circuit pointé n'a pas à être pris en compte dans (6).

Considérons donc un chemin μ de i à j empruntant successivement p+q fois ($q \geq 1$) un circuit pointé. Soit $\gamma_{\ell\ell}$ ce circuit pointé d'origine ℓ. Le chemin μ se décompose donc en un chemin $\mu_{i\ell}$ de i à ℓ en p+q fois le circuit $\gamma_{i\ell}$, puis en un chemin $\mu_{\ell j}$ de ℓ à j ; nous noterons :

$$\mu = \mu_{i\ell}\,(\gamma_{\ell\ell})^{\,p+q}\,\mu_{\ell j}.$$

Si $\mu \in P_{ij}^{(k)}$ alors chacun des chemins :

$$\mu^r = \mu_{il}\,(\gamma_{\ell\ell})^{r+q-1}\,\mu_{\ell j} \text{ avec } r = 0,\ 1,\dots,\ p$$

appartient aussi à $P_{ij}^{(k)}$.

Montrons que le chemin μ peut être absorbé dans (6) par l'ensemble des chemins μ^r (pour r = 0, 1,... p). En effet :

$$w(\mu) \oplus \sum_{0\leq r\leq p} w(\mu^r) = w(\mu_{il}) \otimes w(\gamma_{ll})^{p+q} \otimes w\left(\mu_{lj}\right) \oplus \sum_{0\leq r\leq p} w\left(\mu_{il}\right) \otimes w\left(\gamma_{ll}\right)^{r+q-1} \otimes w(\mu_{lj})$$

d'où, en tenant compte de la distributivité à droite et à gauche de $\otimes$:

$$w(\mu) \oplus \sum_{0\leq r\leq p} w(\mu^r) = w(\mu_{il}) \otimes w(\gamma_{ll})^{q-1} \otimes \left[e \oplus w(\gamma_{ll}) \oplus \dots \oplus w(\gamma_{ll})^p \oplus w(\gamma_{ll})^{p+1}\right] \otimes w(\mu_{lj})$$

Alors, en tenant compte que G(A) est sans circuit p-absorbant, on a :

$w(\mu_{ll})^{(p+1)} = w(\mu_{ll})^{(p)}$ et l'équation précédente devient :

$$w(\mu) \oplus \sum_{o\leq r\leq p} w(\mu^r) = \sum_{o\leq r\leq p} w(\mu^r)$$

On en déduit la proposition en appliquant cette propriété d'absorption à tous les chemins empruntant plus de p fois successivement un circuit pointé de G (A). □

Un cas particulier, fréquemment rencontré dans les exemples (cf § 6 ci-après), est celui où p = 0, c'est-à-dire le cas où, pour chaque circuit pointé γ, on a :

$$w(\gamma) \oplus e = e.$$

Notons :

- $P_{ij}^{(k)}(o)$ l'ensemble des chemins *élémentaires* (n'empruntant pas deux fois le même sommet) de $P_{ij}^{(k)}$.

- P_{ij} (o) l'ensemble des chemins *élémentaires* de i à j.

Dans ce cas, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.4

Si G(A) est sans circuit 0-absorbant, alors :

$$\left(A^{(k)}\right)_{ij} = \sum_{\mu \in P_{ij}^{(k)}(o)} w(\mu) \quad (8)$$

$$\left(A^{(n-1)}\right)_{ij} = \sum_{\mu \in P_{ij}(o)} w(\mu) \quad (9)$$

Démonstration

(8) est une conséquence immédiate de (7) en tenant compte du fait que p = 0. (9) se déduit alors de (8) en remarquant qu'un chemin *élémentaire* comporte au plus n-1 arcs. □

3.3. CONDITIONS D'EXISTENCE DE LA QUASI-INVERSE A*

Dans le cas où G(A) est sans circuit 0-absorbant, on peut immédiatement déduire du corollaire 3.2.4 du § 3.2 le :

Théorème 1 (Carré 1971, Gondran 1973)

Si G(A) est sans circuit 0-absorbant, alors la suite des matrices $A^{(k)}$ admet une limite A* quand $k \to \infty$, et cette limite est atteinte pour $k \leq n-1$:

$$A^* = \lim_{k \to \infty} A^{(k)} = A^{(n-1)} = A^{(n)} = \ldots \quad (10)$$

De plus, A* (quasi-inverse de A) vérifie les équations matricielles :

$$A^* = I \oplus A \otimes A^* = I \oplus A^* \otimes A \quad (11)$$

Démonstration

Le fait que la suite $A^{(k)}$ admet une limite qui est sûrement atteinte pour k = n-1 découle directement de (8) et (9).

Par ailleurs on a :

$$I \oplus A \otimes A^* = I + A \otimes (I \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{n-1})$$
$$= A^{(n)} = A^{(n-1)} = A^*$$

ce qui démontre (11). □

Le résultat précédent montre que si tous les poids des circuits de G(A) sont des éléments 0-stables de E, alors la matrice A est (n-1) stable dans M_n (E).

Remarque

Le théorème 1 peut se généraliser au cas des dioïdes à droite (resp : des dioïdes à gauche) où $\otimes$ est seulement distributive à droite (resp : à gauche) par rapport à $\oplus$. Dans ce cas, il faut supposer que G est sans circuit 0-absorbant à droite (resp : à gauche), c'est-à-dire que, pour tout circuit γ, on doit avoir, $\forall\ a \in E : a \oplus w(\gamma) \otimes a = a$ (resp : $a \oplus a \otimes w(\gamma) = a$).

On se reportera à l'Annexe 1 en fin de rapport. ‖

Etudions maintenant le cas où G(A) est sans circuit p-absorbant avec $p \geq 1$. Dans cette situation, les seules hypothèses de la *Propriété 3.2.3* ne suffisent pas pour démontrer la convergence finie de $A^{(k)}$, la cardinalité des chemins intervenant dans (7) ne pouvant être bornée. Nous examinerons donc successivement deux types d'hypothèses supplémentaires :

- commutativité de la multiplication
- p-nilpotence de l'ensemble des termes de la matrice A.

Considérons d'abord l'hypothèse ou la *multiplication* est *commutative*.

Notons :

- $P_{ij}^{(k)}(p)$ l'ensemble des chemins de $P_{ij}^{(k)}$ n'empruntant pas plus de p fois chaque circuit élémentaire de G(A).
- $P_{ij}(p)$ l'ensemble des chemins de i à j n'empruntant pas plus de p fois chaque circuit élémentaire de G(A).

Remarquons que la cardinalité (en nombre d'arcs) des chemins de $P_{ij}(p)$ est majorée par n-1+pnt, où t désigne le nombre total de circuits élémentaires de G(A).

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2 (Gondran 1973)

Si G est sans circuit p-absorbant et si la multiplication est commutative, alors :

$$\left(A^{(k)}\right)_{ij} = \sum_{\mu \in P_{ij}^{(k)}(p)} w(\mu) \qquad (12)$$

$$\left(A^{(n_p)}\right)_{ij} = \sum_{\mu \in P_{ij}(p)} w(\mu) \qquad (13)$$

où n_p est le nombre maximum d'arcs des chemins de $P_{ij}(p)$ ($n_p \leq n-1+pnt$ où t est le nombre total de circuits élémentaires de G(A)).

De plus la suite des matrices $A^{(k)}$ admet une limite A^* quand $k \to \infty$, et cette limite est atteinte pour $k \leq n_p$:

$$A^* = \lim_{k \to +\infty} A^{(k)} = A^{(n_p)} = A^{(n_p+1)} = \ldots \qquad (14)$$

A^* (quasi inverse de A) vérifie alors les équations matricielles (11).

Démonstration

(12) se déduit directement de la Propriété 3.2.3 puisque la commutativité de $\otimes$ permet de considérer tout circuit comme un produit de circuits élémentaires, et de ne pas tenir compte de l'ordre dans lequel ces circuits sont parcourus.
Le reste du théorème se démontre de la même façon que pour le théorème 1. □

Le résultat précédent montre que, si la multiplication est commutative et si tous les poids des circuits de G(A) sont des éléments p-stables de E, alors la matrice A est n_p -stable dans M_n (E) (avec $n_p \leq n\text{-}1\text{+}pnt$ où t est le nombre de circuits élémentaires de G (A)).

Considérons maintenant le cas où $\otimes$ n'est pas commutative, mais où l'ensemble des termes de la matrice A est *p-nilpotent*.

Soit F un sous ensemble de E et p un entier > 0. On dira que F est *p-nilpotent* si et seulement si, pour toute suite de p+1 éléments (non nécessairement tous distincts) a_0, a_1, a_2,... a_p pris dans F, on a :

$a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_p = \varepsilon$ (l'élément neutre de $\oplus$)

Le résultat suivant montre alors qu'une hypothèse de p-nilpotence permet de se passer de la commutativité de la multiplication pour établir la convergence de la suite $A^{(k)}$.

Théorème 3 (Minoux 1976)

Si l'ensemble F des coefficients a_{ij} de la matrice A est p-nilpotent, alors la matrice $A^{(k)}$ admet une limite A^* qui est atteinte pour $k \leq p$:

$$A^* = \lim_{k \to +\infty} A^{(k)} = A^{(p)} = A^{(p+1)} = \ldots$$

A^* vérifie alors les équations matricielles (11).

Démonstration

Il suffit de remarquer que tous les chemins de plus de p arcs n'ont pas à être pris en compte dans (6). (11) se démontre comme pour le théorème 1. □

Le théorème 3 montre ainsi que, si l'ensemble des termes de A est p-nilpotent, alors la matrice A est p-stable. Remarquons que tous les éléments d'un ensemble p-nilpotent sont p-stables : l'hypothèse de p-nilpotence est donc plus forte que celle de p-stabilité.

3.4. QUASI-INVERSE ET SOLUTIONS DE SYSTÈMES LINÉAIRES. MINIMALITÉ POUR LES DIOÏDES

Supposons que la matrice A admette une quasi-inverse A* qui vérifie les relations (11).

Le résultat suivant montre que A* permet de déterminer des solutions pour les systèmes (1) et (2) du §1.

Propriété 3.4.1

Soit $A \in M_n(E)$ et supposons que sa quasi-inverse A* existe et vérifie :

$A^* = I \oplus A \otimes A^* = I \oplus A^* \otimes A$ (11)

Alors :

(i) pour toute matrice $B \in E^{mxn}$
(m entier $1 \leq m \leq n$)
$Y = B \otimes A^* \in E^{mxn}$ est solution du système linéaire matriciel :
$Y = Y \otimes A \oplus B$ (15)

(ii) pour toute matrice $B \in E^{nxm}$ (m entier $1 \leq m \leq n$) $Z = A^* \otimes B \in E^{nxm}$ est solution du système linéaire matriciel :
$Z = A \otimes Z \oplus B$ (16)

Démonstration

On obtient (15) avec $Y = B \otimes A^*$ en multipliant (11) à gauche par B et (16) avec $Z = A^* \otimes B$, en multipliant (11) à droite par B. □

Dans le cas particulier où m = 1, la Propriété ci-dessus montre comment construire, à partir de A^*, des solutions pour des systèmes de type (1) et (2) introduits dans le § 1.

Considérons maintenant le cas où $(E, \oplus, \otimes)$ est un *dioïde*, c'est-à-dire où la relation de préordre canonique $\leq$ est une *relation d'ordre*.

La propriété suivante établit alors la *minimalité* au sens de cette relation d'ordre des solutions construites à l'aide de la quasi-inverse.

Propriété 3.4.2

Supposons qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $A^* = A^{(K)} = A^{(K+1)} = ...$

Si $(E, \oplus, \otimes)$ est un *dioïde* muni de la relation d'ordre canonique $\leq$, alors $Y = B \otimes A^*$ (resp $Z = A^* \otimes B$) est la *solution minimale* dans l'ensemble des solutions de (15) (resp : dans l'ensemble des solutions de (16)) ordonné par la relation d'ordre induite par $\leq$.

Démonstration

Soit Y une solution quelconque de (15)

On peut écrire :

$$
\begin{aligned}
Y &= B \oplus (B \oplus Y \otimes A) \otimes A \\
&= B \otimes (I \oplus A) \oplus Y \otimes A^2
\end{aligned}
$$

et, d'une façon générale, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$Y = B \otimes (I \oplus A \oplus ... \oplus A^{k-1}) \oplus Y \otimes A^k$$

On a donc pour $k \geq K$:

$$Y = B \otimes A^* \oplus Y \otimes A^k$$

ce qui montre que $B \otimes A^* \leq Y$

Par suite $B \otimes A^*$ est la solution minimale dans l'ensemble des solutions de (15).

On démontrerait, de manière analogue, que $A^* \otimes B$ est la solution minimale de (16). □

On retrouve ainsi, sous une forme généralisée, la propriété de minimalité déjà rencontrée dans le § 2.4 à propos du problème du plus court chemin dans un graphe.

En prenant, par exemple, pour B le vecteur-ligne b^T (matrice 1 x n) dont toutes les composantes sont ε sauf la composante d'indice i_o égale à e, on remarque que $b^T \otimes A^*$, qui n'est autre que la ligne d'indice i_o de A^*, est la solution minimale de l'équation :

$$y = y \otimes A \oplus b^T$$

Ainsi, lorsque E est un dioïde, il revient au même de calculer A^* ou de rechercher des solutions minimales pour chacun des n systèmes linéaires de type (1) obtenus en prenant b égal successivement aux n vecteurs unitaires :

$$
\begin{aligned}
&(e, \varepsilon, \varepsilon, ... \varepsilon)^T \\
&(\varepsilon, e, \varepsilon .... \varepsilon)^T \\
&\quad\vdots \\
&(\varepsilon, \varepsilon, ..., \quad e)^T
\end{aligned}
$$

4. ALGORITHMES ITERATIFS POUR LA RESOLUTION DE SYSTEMES LINEAIRES

Pour $A \in M_n$ (E) donnée, nous avons montré dans le § 3 comment la résolution de systèmes linéaires de type :

$$y = y \otimes A \oplus b^T \qquad (1)$$

ou

$$z = A \otimes z \oplus b \qquad (2)$$

(et plus généralement de systèmes linéaires matriciels de type (15) ou (16)) peut se ramener à la détermination de la quasi-inverse A* de A.

Le calcul de A* pourra se faire, suivant les cas, ligne par ligne, colonne par colonne ou globalement.

4.1. ALGORITHME DE JACOBI GÉNÉRALISÉ

Supposons, pour fixer les idées, que l'on cherche à déterminer la première ligne de la matrice A*. Autrement dit, on cherche $y = b^T \otimes A^*$ avec $b^T = (e, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$.

D'après le § 3, on sait que y est solution de l'équation (de type "point fixe") :

$$y = y \otimes A \oplus b^T \qquad (1)$$

L'algorithme 1 ci-dessous peut alors être vu comme l'analogue direct de la méthode de Jacobi, en algèbre linéaire classique, pour résoudre un système de type (1).

Algorithme 1 **(Jacobi généralisé)**

Détermination de la première ligne de A*, ou preuve que $A^{(K)} \neq A^*$

(a) poser $y^o = b^T = (e, \varepsilon, \ldots \varepsilon)$; $t \leftarrow 0$;

(b) A l'itération t, soit y^t la solution courante. Calculer
$y^{t+1} = y^t \otimes A \oplus b^T$
Si $y^{t+1} = y^t$, l'algorithme se termine et $y^t = b^T \otimes A^*$ (la première ligne de A*)
Si $y^{t+1} \neq y^t$ et $t \leq K$ alors faire $t \leftarrow t+1$ et retourner en (b).
Si $y^{t+1} \neq y^t$ et $t = K$ alors interrompre les calculs : $A^* \neq A^{(K)}$

Théorème 4.

(i) Si il existe K entier tel que $A^* = A^{(K)}$, alors l'algorithme de Jacobi généralisé construit, en au plus K itérations, la première ligne de A^*. Dans le cas contraire, l'algorithme prouve en au plus K itérations que $A^* \neq A^{(K)}$.

(ii) Si A^* existe et si $(E, \oplus, \otimes)$ est un dioïde topologique, alors l'algorithme de JACOBI généralisé engendre une suite croissante et convergente (au sens de la sup-topologie) vers la première ligne de A^*.

Démonstration

Démontrons tout d'abord (i), c'est-à-dire la convergence finie.
On a $y^o = b^T$ d'où $y^1 = b^T \otimes (I \oplus A)$
$y^2 = b^T \otimes (I \oplus A \oplus A^2)$ et, par induction, $\forall\, t \in \mathbb{N}$:
$y^t = b^T \otimes (I \oplus A \oplus A^2 \oplus .... \oplus A^t) = b^T \otimes A^{(t)}$
ce qui montre que la suite des solutions engendrées par l'algorithme est monotone croissante.

Si il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $A^{(K)} = A^*$ alors on a : $y^K = b^T \otimes A^* = y^{K+1} = ...$

Par conséquent, si $y^{K+1} \neq y^K$, c'est que $A^* \neq A^{(K)}$.

Démontrons maintenant (ii), c'est-à-dire la convergence dans les dioïdes topologiques.
D'après ce qui précède on a, $\forall\, t : y^t = b^T \otimes A^{(t)}$. Comme A^* existe, la suite $A^{(t)}$ est croissante et convergente vers A^*. Comme le passage à la limite est compatible avec les lois $\oplus$ et $\otimes$ (puisque l'on est dans un dioïde topologique), on en déduit que y^t admet pour limite $b^T \otimes A^*$, la première ligne de A^*. □

En pratique, on pourra souvent obtenir un majorant du nombre K tel que $A^{(K)} = A^*$ avec des hypothèses supplémentaires. Par exemple :

- en l'absence de circuit 0-absorbant (cf § 3, Théorème 1) alors $K \leq n-1$;
- si la multiplication $\otimes$ est commutative et en l'absence de circuit p absorbant (cf § 3, Théorème 2) alors $K \leq n-1 + pn\, t$, où t est le nombre total de circuits élémentaires de G (A) ;
- si l'ensemble F des termes de A est p-nilpotent (cf § 3 Théorème 3) alors $K \leq p$.

Dans le cas où les itérations s'arrêtent à l'itération $t = K$ avec $y^{K+1} \neq y^K$, on aboutit à une situation incohérente avec les hypothèses. L'algorithme de Jacobi peut donc également être considéré comme un moyen de vérification algorithmique de la pertinence des

hypothèses utilisées.
Le résultat suivant donne la complexité de l'algorithme 1.

Proposition 4.1.1

En supposant que la complexité de chacune des opérations $\oplus$ et $\otimes$ est en $\mathcal{O}$ (1) l'algorithme de Jacobi a pour complexité $\mathcal{O}$ (Kn^2) si la matrice A a tous ses termes différents de ε, et $\mathcal{O}$ (KM) si M est le nombre de termes de A différents de ε.

Démonstration
Chaque itération exige un produit matrice-vecteur (n^2 opérations $\oplus$ et $\otimes$) et une somme de deux vecteurs (n opérations $\oplus$). La complexité est donc $\mathcal{O}$ (K n^2). Si le nombre de termes de A différents de ε est $M << n^2$, cette complexité peut être ramenée à $\mathcal{O}$ (K.M) en utilisant une représentation compacte de A. □

Dans le cas du problème du plus court chemin ($E = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\oplus$ = Min, $\otimes$ = +), l'algorithme 1 n'est autre que l'algorithme de BELLMAN (1958).

4.2. ALGORITHME DE GAUSS-SEIDEL GÉNÉRALISÉ

Par analogie avec la version classique de l'algorithme de Gauss-Seidel, l'idée consiste à décomposer la matrice A en l'exprimant comme la somme d'une matrice triangulaire inférieure L et d'une matrice triangulaire supérieure U. Pour simplifier la présentation nous supposerons pour commencer que les éléments diagonaux de A sont tous égaux à ε.
On a donc :
$A = U \oplus L$
L'itération de base de l'algorithme de Jacobi généralisé (cf § 4.1) se met alors sous la forme :
$y^{t+1} = b^T \oplus y^t \otimes U \oplus y^t \otimes L$
Ainsi, pour toute composante j = 1,... n, le calcul de y_j^{t+1} se fait par la relation :

$$y_j^{t+1} = b_j \oplus \sum_{i=1}^{j-1} y_i^t \otimes a_{ij} \oplus \sum_{i=j+1}^{n} y_i^t \otimes a_{ij}$$

Lors du calcul de y_j^{t+1}, tous les termes y_1^{t+1}, y_2^{t+1}, …, y_{j-1}^{t+1} ont déjà été déterminés. L'idée de l'algorithme de Gauss-Seidel est alors de remplacer les valeurs y_j^t dans la première sommation par les nouvelles valeurs y_j^{t+1} déjà déterminées, ce qui conduit à la récurrence :

$$y_j^{t+1} = b_j \oplus \sum_{i=1}^{j-1} y_i^{t+1} \otimes a_{ij} \oplus \sum_{i=j+1}^{n} y_i^{t} \otimes a_{ij}$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$y^{t+1} = b^T \oplus y^{t+1} \otimes U \oplus y^t \otimes L \qquad (17)$$

Ceci conduit à l'algorithme suivant :

Algorithme 2 **(Gauss-Seidel généralisé)**

Détermination de la première ligne de A^* ou preuve que $A^{(K)} \neq A^*$

(a) Poser $b^T = (e, \varepsilon, \dots \varepsilon)^T$ et $y^o = (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \dots \varepsilon)$; $t \leftarrow 0$;

(b) A l'itération t, soit y^t la solution courante. Calculer :
$y^{t+1} = b^T \oplus y^{t+1} \otimes U \oplus y^t \otimes L$
Si $y^{t+1} = y^t$, l'algorithme se termine et $y^t = b^T \otimes A^*$ (la première ligne de A^*)
Si $y^{t+1} \neq y^t$ et $t \leq K$ alors, faire $t \leftarrow t+1$ et retourner en (b)
Si $y^{t+1} \neq y^t$ et $t = K$ alors interrompre les calculs : $A^* \neq A^{(K)}$.

Théorème 5

(i) S'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $A^{(K)} = A^*$, alors l'algorithme de Gauss-Seidel généralisé construit, en K itérations au plus, la première ligne de A^*. Dans le cas contraire, l'algorithme prouve, en K itérations au plus, que $A^* \neq A^{(K)}$.

(ii) Si A^* existe et si $(E, \oplus, \otimes)$ est un dioïde topologique, alors l'algorithme de GAUSS-SEIDEL généralisé engendre une suite croissante et convergente (au sens de la Sup-Topologie) vers la première ligne de A^*.

Démonstration

Démontrons tout d'abord (i), c'est-à-dire le cas de la convergence *finie* .

Pour cela considérons $\hat{y}^t$ la solution obtenue à partir de $\hat{y}^0 = (\varepsilon, \varepsilon, \dots \varepsilon)$ à la $t^{\text{ième}}$ itération de la méthode de JACOBI c'est-à-dire par :

$$\hat{y}_j^{t+1} = b_j \otimes \sum_{i=1}^{j-1} \hat{y}_i^t \otimes a_{ij} \oplus \sum_{i=j+1}^{n} \hat{y}_i^t \otimes a_{ij}$$

Rappelons que, par construction $\hat{y}^{t+1} \geq \hat{y}^t$.

Démontrons alors par récurrence que, $\forall t$: $\hat{y}^t \leq y^t$

Cette relation est vraie pour t = 0. Supposons-la donc vraie pour $t \in \mathbb{N}$ quelconque.

Alors on peut écrire, $\forall$ j = 1, …, n :

$$y_j^{t+1} = b_j \oplus \sum_{i=1}^{j-1} y_i^{t+1} \otimes a_{ij} \oplus \sum_{i=j+1}^{n} y_i^{t} \otimes a_{ij}$$

$$\geq b_j \oplus \sum_{i=1}^{j-1} \hat{y}_i^{t+1} \otimes a_{ij} \oplus \sum_{i=j+1}^{n} \hat{y}_i^{t} \otimes a_{ij}$$

$$\geq b_j \oplus \sum_{i=1}^{j-1} \hat{y}_i^{t} \otimes a_{ij} \oplus \sum_{i=j+1}^{n} \hat{y}_i^{t} \otimes a_{ij}$$

d'où l'on déduit $y_j^{t+1} \geq \hat{y}_j^{t+1}$

Par suite, dans le cas où l'algorithme de JACOBI converge de façon finie, l'algorithme de GAUSS-SEIDEL généralisé ne peut nécessiter plus d'itérations. On en déduit (i).

Démontrons maintenant (ii), c'est-à-dire la convergence dans les dioïdes topologiques. La matrice U étant triangulaire supérieure, elle est n-nilpotente, c'est-à-dire que $U^n = U^{n+1} = U^{n+2} = \ldots = \Sigma$ (matrice n x n dont tous les termes sont égaux à ε). Par suite, la quasi-inverse U^* de U existe, et est égale à $U^{(n-1)}$.

D'autre part, en raison de la forme de l'itération (17), on observe que y^{t+1} est solution minimale en y de l'équation :

$y = b^T \otimes y \oplus b^T \oplus y^t \otimes L$

On a donc :

$$y^{t+1} = (b^T \oplus y^t \otimes L) \otimes U^* \qquad (18)$$

ce qui fournit l'expression de y^{t+1} en fonction de y^t seulement.

On peut alors interpréter (18) comme une itération de type Jacobi appliquée à l'équation :

$$y = b^T \otimes U^* \oplus y \otimes (L \otimes U^*) \qquad (19)$$

En utilisant la démonstration du théorème 4, et en tenant compte du fait que $y^\circ = (\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$, on peut écrire, $\forall$ t :

$y^t = (b^T \otimes U^*) \otimes [I \oplus (L \otimes U^*) \oplus (L \otimes U^*)^2 \oplus \ldots \oplus (L \otimes U^*)^t]$

Comme $A^* = (U \oplus L)^*$ existe, $(L \otimes U^*)^*$ existe et l'on a :

$(U \oplus L)^* = U^* \otimes (L \otimes U^*)^*$.

La suite y^t engendrée par l'algorithme de GAUSS-SEIDEL généralisé est donc croissante et majorée avec pour limite :

$b^T \otimes U^* \otimes (L \otimes U^*)^*$

$= b^T \otimes (U \oplus L)^* = b^T \otimes A^*$

c'est-à-dire la solution minimale de l'équation $y = y \otimes A \oplus b^T$. □

Appliqué au problème du plus court chemin dans un graphe, l'Algorithme 2 n'est autre que l'algorithme de FORD (1956). Dans ce cas, on a convergence finie.

Remarque :
Dans le cas où les éléments diagonaux de A ne sont pas tous égaux à ε, mais sont quasi-inversibles, le calcul de y^{t+1} à partir de y^t à chaque itération doit être modifié, et se faire selon la procédure suivante :
pour j = 1, 2, …, n

$$y_j^{t+1} = \left(b_j \oplus \sum_{i=1}^{j-1} y_i^{t+1} \otimes a_{ij} \oplus \sum_{i=j+1}^{n} y_i^t \otimes a_{ij} \right) \otimes a_{jj}^*$$

(où a_{jj}^* dénote le quasi inverse du terme diagonal a_{jj}). ||

4.3. L'ALGORITHME DE DIJKSTRA GÉNÉRALISÉ ("ALGORITHME GLOUTON") DANS CERTAINS DIOÏDES SÉLECTIFS

Nous allons montrer maintenant que l'on peut obtenir un algorithme généralement plus efficace que ceux décrits dans les paragraphes précédents en se restreignant à une classe particulière de dioïdes.

Nous supposerons ainsi, dans tout ce paragraphe, que (E, ⊕, ⊗) est un *dioïde sélectif* et dans lequel e (l'élément neutre de ⊗) est le plus grand élément (au sens de la relation d'ordre du dioïde), autrement dit : $\forall\ a \in E : e \oplus a = e$. La relation d'ordre étant compatible avec la multiplication, on a donc, dans un tel dioïde :

$\forall\ a \in E, \qquad b \geq c \quad \Rightarrow \qquad b \otimes e \geq c \otimes a \Rightarrow b \geq c \otimes a \quad (18)$

$(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \text{Min}, +)$, $([0, 1], \text{Max}, \times)$ $(\{0, 1\}, \text{Max}, \text{Min})$, $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \text{Max}, \text{Min})$ sont des exemples de dioïdes sélectifs dans lequel e est le plus grand élément.

Rappelons que, dans un dioïde où e est le plus grand élément, tout élément de E est 0-stable. Toute matrice $A \in M_n(E)$ est donc quasi-inversible puisque G (A) est alors sans circuit 0-absorbant (cf. Théorème 1, § 3.3).

L'algorithme 3, décrit ci-après, utilise le résultat suivant.

Théorème 6 (Gondran 1975b)
Soit (E, $\oplus$, $\otimes$) un dioïde sélectif dans lequel e est le plus grand élément.
Etant donnée $A \in M_n(E)$, considérons le système linéaire :

$$z = z \otimes A \oplus b \tag{19}$$

où b est un vecteur-ligne à n composantes donné et soit $\bar{z} = b \otimes A^*$ la solution minimale de ce système. Alors il existe $i_o \in [1, n]$ tel que $\bar{z}_{i_o} = b_{i_o}$ et cet indice i_o est défini par :

$$b_{i_o} = \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{20}$$

Démonstration

a) Soit i_o défini par (20). Montrons d'abord qu'il existe une solution $\hat{z}$ de (19) telle que $\hat{z}_{i_o} = b_{i_o}$.

En posant $z_{i_o} = b_{i_o}$ les équations (19) s'écrivent, pour $i \neq i_o$:

$$z_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_o}}^{n} z_j \otimes a_{ji} \oplus \left(b_i \oplus b_{i_o} \otimes a_{i_o i}\right) \tag{21}$$

et pour $i = i_o$:

$$z_{i_o} = \sum_{j=1}^{n} z_j \otimes a_{ji_o} \oplus b_{i_o} \tag{22}$$

En notant $\tilde{A}$ la matrice déduite de A en supprimant la ligne i_o et la colonne i_o, $\tilde{z}$ le vecteur déduit de z en supprimant la composante i_o, les relations (21) s'écrivent sous forme du système :

$$\tilde{z} = \tilde{z} \otimes \tilde{A} \oplus \tilde{b} \tag{23}$$

où $\tilde{b}$ est le vecteur de composantes $(b_i \oplus b_{i_o} \otimes a_{i_o i})$ pour $i \neq i_o$. Ce système admet $\tilde{z} = \tilde{b} \otimes \tilde{A}^*$ comme solution minimale. Soit alors $\hat{z}$ le vecteur de dimension n tel que $\hat{z}_{i_o} = b_{i_o}$ et dont les composantes $\hat{z}_i$ $(i \neq i_o)$ sont celles de

$\tilde{z} = \tilde{b} \otimes \tilde{A}^*$.

Par construction, $\hat{z}$ vérifie (21). Montrons qu'il vérifie également (22).
Pour cela, et du fait de l'idempotence de $\oplus$, il suffit de montrer que :

$$\forall j \neq i_o : b_{i_o} \geq \hat{z}_j \otimes a_{ji_o} \tag{24}$$

D'après (20) : $b_{i_o} \geq b_i$, d'où il découle par (18) : $b_{i_o} \geq b_i \otimes \left(\tilde{A}^*\right)_{ij}$.

Toujours en utilisant (18), on peut aussi écrire :

$$b_{i_o} \geq b_{i_o} \otimes a_{i_o i} \otimes \left(\tilde{A}^*\right)_{ij}$$

Alors, $\hat{z}_j$ étant défini, $\forall\, j \neq i_o$, par la relation :

$$\hat{z}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_o}}^{n} \left(b_i \oplus b_{i_o} \otimes a_{i_o i}\right) \otimes \left(\tilde{A}^*\right)_{ij}$$

on déduit de ce qui précède que : $b_{i_o} \geq \hat{z}j$

ce qui, par (18), entraîne (24).

Ainsi, $\hat{z}$ défini plus haut est solution de (19).

(b) Il reste à montre que $\hat{z}$ est solution minimale de (19).

Pour toute solution z de (19) on a (22) donc $z_{i_o} \geq b_{i_o} = \hat{z}_{i_o}$.

D'autre part, $\tilde{\tilde{z}}$ (déduit de z en supprimant la composante i_o) est solution de

$$\tilde{\tilde{z}} = \tilde{\tilde{z}} \otimes \tilde{A} \oplus \tilde{\tilde{b}} \tag{25}$$

où $\tilde{\tilde{b}}$ est le vecteur de composantes $(b_i \oplus z_{i_o} \otimes a_{i_o i})$ pour $i \neq i_o$.

Comme $\tilde{\tilde{b}} \geq \tilde{\tilde{z}}$, et que $\tilde{\tilde{b}} \otimes \tilde{A}^*$ est solution minimale de (25) on a :

$$\tilde{\tilde{z}} \geq \tilde{\tilde{b}} \otimes \tilde{z}^* \geq \tilde{b} \otimes \tilde{A}^* = \tilde{z}$$

On en déduit $z \geq \hat{z}$, c'est-à-dire la minimalité de $\hat{z}$. □

Le résultat précédent peut être utilisé pour déterminer la matrice A^* ligne par ligne. Par exemple, pour déterminer la première ligne de A^*, on choisira $b = (e, \varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$. Le calcul de $\bar{z} = \left(A^*_{1,1}, A^*_{1,2}, \ldots, A^*_{1,n}\right)$ pourra alors se faire de proche en proche, de la façon suivante.

On détermine un indice $i_o \in [1, n]$ tel que :

$$b_{i_o} = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Par le théorème 6, on en déduit la composante i_o de la solution cherchée : $\bar{z}_{i_o} = b_{i_o}$

Avec cette information, on peut alors ramener le problème à la détermination de la solution minimale du système linéaire réduit :

$$\tilde{z} = \tilde{z} \otimes \tilde{A} \oplus \tilde{b} \tag{23}$$

avec, $\forall\ i \neq i_o$: $\tilde{b}_i = b_i \oplus b_{i_o} \otimes a_{i_o i}$, et où $\tilde{A}$ est la matrice déduite de A par suppression de la ligne i_o et de la colonne i_o.

En appliquant de nouveau le théorème 6 à ce dernier problème, on détermine un indice $i_1 \in [1, n] \setminus \{i_o\}$ par :

$$\tilde{b}_{i_1} = \sum_{i \in [1,n] \setminus \{i_o\}} \tilde{b}_i$$

et on obtient $\overline{z}_{i_1} = \tilde{b}_{i_1}$, et ainsi de suite.

A chaque étape, on obtient la valeur d'une nouvelle composante de la solution $\overline{z}$ et la dimension du problème décroît d'une unité. Au bout de n étapes, le vecteur solution est donc obtenu.

On est ainsi conduit à l'algorithme suivant :

Algorithme 3 (DIJKSTRA généralisé)

Détermination d'une ligne de A^* d'indice r quelconque ($r \in [1, n]$)

(a) Initialisation :

Poser : $\begin{cases} \pi(r) \leftarrow e & \\ \pi(i) \leftarrow \varepsilon & \text{pour } i \in [1, n] \setminus \{r\} \end{cases}$

$T = \{1, 2, \ldots, n\}$

(b) Etape courante :

(b_1) Déterminer l'indice $i \in T$ par :

$$\pi(i) = \sum_{j \in T} \pi(j)$$

puis faire : $T \leftarrow T \setminus \{i\}$

Si $T = \emptyset$, fin de l'algorithme : le vecteur $(\pi(1), \pi(2), \ldots \pi(n))$ est la ligne r de A^*.

Si $T \neq \emptyset$ aller en (b_2).

(b_2) Pour tout $j \in T$ faire :

$\pi(j) \leftarrow \pi(j) \oplus \pi(i) \otimes a_{ij}$

et retourner en (b).

Le résultat suivant établit la complexité de l'algorithme 3.

Proposition 4.3.1

L'algorithme 3 nécessite $\mathcal{O}(n^2)$ opérations $\oplus$ et $\mathcal{O}(n^2)$ opérations $\otimes$.

Démonstration
A l'itération k où $|T| = n - k + 1$, le calcul de l'indice i à l'étape (b_1) nécessite $n - k + 1$ opérations $\oplus$ et la mise à jour des valeurs π (j) à l'étape (b_2) nécessite $n - k$ opérations $\oplus$ et $n - k$ opérations $\otimes$. Le résultat s'en déduit en effectuant la somme pour k variant de 1 à n. □

Dans le cas particulier du problème du plus court chemin dans un graphe avec longueurs toutes positives ou nulles, on retrouve l'algorithme classique de DIJKSTRA (1959).

5. ALGORITHMES DIRECTS : METHODE DE GAUSS-JORDAN GENERALISEE ET VARIANTES

Nous généralisons dans ce paragraphe le calcul classique de l'inverse d'une matrice par pivots de Gauss au calcul de la quasi-inverse d'une matrice $A \in M_n$ (E) dans un semi-anneau ou dans un dioïde, lorsque celle-ci existe.

On sait alors (cf § 3.3) que la quasi-inverse A* satisfait le système matriciel (11) et que, de plus, si (E, $\oplus$, $\otimes$) est un dioïde, A* est solution minimale des système matriciels :

$$Y = Y \otimes A \oplus I \qquad (26)$$

et

$$Z = A \otimes Z \oplus I \qquad (27)$$

où : $Y = (y_{ij}) \in M_n$ (E) et $Z = (z_{ij}) \in M_n$ (E) désignent, dans chaque cas, la matrice (inconnue) à déterminer. I dénote la matrice identité de M_n (E).

5.1. MÉTHODE DE GAUSS-JORDAN GÉNÉRALISÉE : PRINCIPE

Nous décrirons la méthode de Gauss-Jordan généralisée en considérant le système (26)' :

$$Y = Y \otimes A \oplus B \qquad (26)'$$

où $B = (b_{ij}) \in M_n$ (E) est une matrice quelconque donnée.

Notons que l'on pourra obtenir des formules analogues pour la résolution du système :

$$Z = A \otimes Z \oplus B \qquad (27)'$$

Nous supposerons que (E, $\oplus$, $\otimes$) est un dioïde ayant la propriété (π) suivante :
Soit $a \in E$, $b \in E$; si l'équation $y = y \otimes a \oplus b$ a une solution en y, alors a* (quasi-inverse de a) existe. (Notons que la propriété (π) est satisfaite dans tout dioïde dans lequel toute suite croissante majorée a une limite donc, en particulier, dans les dioïdes topologiques).

Comme nous le verrons, la propriété (π) nous permettra de montrer qu'à chaque étape, la méthode calcule des expressions conduisant à des solutions minimales. Dans le cas où

(E, ⊕, ⊗) n'est pas un dioïde, mais seulement un semi-anneau, la méthode donnera une solution de (26)' qui n'a pas nécessairement de propriété de minimalité.

Dans le cas particulier où B = I (la matrice identité de M_n (E)) et où (E, ⊕, ⊗) est un dioïde, la méthode de Gauss-Jordan généralisée détermine donc la solution minimale de (26) c'est-à-dire la quasi-inverse A* de A.

La première équation de (26)' s'écrit :

$$y_{11} = y_{11} \otimes a_{11} \oplus \sum_{j=2}^{n} y_{1j} \otimes a_{j1} \oplus b_{11} \qquad (28)$$

Comme nous supposons que A admet une quasi-inverse A* alors on sait que B ⊗ A* = U = (u_{ij}) est solution minimale de (26)' donc u_{11} est solution minimale de l'équation :

$y_{11} = y_{11} \otimes a_{11} \oplus h$

avec $h = \sum_{j=2}^{n} u_{1j} \otimes a_{j1} \oplus b_{11}$

Comme (E, ⊕, ⊗) est un dioïde dans lequel toute suite croissante majorée est convergente (propriété (π)), on en déduit que l'élément a_{11} a un quasi-inverse a^*_{11} et par suite (28) permet d'obtenir l'expression de y_{11} en fonction des autres variables y_{1j} (j = 2,... n) :

$$y_{11} = \sum_{j=2}^{n} y_{1j} \otimes a_{j1} \otimes a^*_{11} \oplus b_{11} \otimes a^*_{11}$$

On procède de même avec toutes les autres équations de (26)' correspondant à la première colonne de Y. On a donc, pour tout i = 1,.... n :

$$y_{i1} = y_{i1} \otimes a_{11} \oplus \sum_{j=2}^{n} y_{ij} \otimes a_{j1} \oplus b_{i1}$$

ce qui, en utilisant a^*_{11}, permet d'exprimer y_{i1} en fonction des autres variables y_{ij} (j = 2,.... n) :

$$y_{i1} = \sum_{j=2}^{n} y_{ij} \otimes a_{j1} \otimes a^*_{11} \oplus b_{i1} \otimes a^*_{11} \qquad (29)$$

Une fois obtenues les expressions de y_{i1} (i = 1...n) données par (29), on peut les substituer dans les autres équations du système (26)', ce qui donne, pour i quelconque et k ≥ 2 :

$$y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \otimes a_{jk} \oplus b_{ik}$$
$$= y_{i1} \otimes a_{1k} \oplus \sum_{j=2}^{n} y_{ij} \otimes a_{jk} \oplus b_{ik}$$

En utilisant (29), l'expression ci-dessus se met sous la forme :

$$y_{ik} = \sum_{j=2}^{n} y_{ij} \otimes (a_{j1} \otimes a_{11}^{*} \otimes a_{1k} \oplus a_{jk}) \oplus b_{i1} \otimes a_{11}^{*} \otimes a_{1k} \oplus b_{ik} \qquad (30)$$

Notons $Y^{[1]}$ la matrice déduite de Y en remplaçant tous les termes de la première colonne par ε et introduisons les matrices carrées n x n

$A^{[1]} = \left(a_{ij}^{[1]}\right)$ et $B^{[1]} = \left(b_{ij}^{[1]}\right)$

définies pour tout j = 1...n et k = 1...n par :

$$a_{jk}^{[1]} = a_{jk} \oplus a_{j1} \otimes a_{11}^{*} \otimes a_{1k} \qquad (31)$$

et

$$b_{jk}^{[1]} = b_{jk} \oplus b_{j1} \otimes a_{11}^{*} \otimes a_{1k} \qquad (32)$$

On remarque que les équations (29), qui définissent la première colonne de Y peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ . \\ . \\ . \\ y_{n1} \end{bmatrix} = Y^{[1]} \otimes \begin{bmatrix} a_{11}^{[1]} \\ a_{21}^{[1]} \\ . \\ . \\ a_{n1}^{[1]} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11}^{[1]} \\ b_{21}^{[1]} \\ . \\ . \\ b_{n1}^{[1]} \end{bmatrix} \qquad (33)$$

En effet, pour i =1,... n, l'expression de y_{i1} donnée par (33) s'écrit :

$$y_{i1} = \sum_{j=2}^{n} y_{ij} \otimes a_{j1}^{[1]} \oplus b_{i1}^{[1]}$$
$$= \sum_{j=2}^{n} y_{ij} \otimes (a_{j1} \oplus a_{j1} \otimes a_{11}^{*} \otimes a_{11}) \oplus b_{i1} \oplus b_{i1} \otimes a_{11}^{*} \otimes a_{11}$$

Or, comme a_{11}^{*} est le quasi-inverse de a_{11}, on a :

$$a_{j1} \oplus a_{j1} \otimes a_{11}^{*} \otimes a_{11} = a_{j1} \otimes (e \oplus a_{11}^{*} \otimes a_{11}) = a_{j1} \otimes a_{11}^{*}$$

et de façon analogue :

$b_{i1} \oplus b_{i1} \otimes a^*_{11} \otimes a_{11} = b_{i1} \otimes a^*_{11}$

ce qui permet d'écrire :

$$y_{i1} = \sum_{j=2}^{n} y_{ij} \otimes a_{j1} \otimes a^*_{11} \oplus b_{i1} \otimes a^*_{11}$$

et l'on retrouve bien l'expression (29).

Les relations (30) et (33) montrent donc qu'après élimination des variables y_{i1} $(i = 1...n)$, le système (26)' se met sous la forme :

$$Y = Y^{[1]} \otimes A^{[1]} \oplus B^{[1]} \qquad (34)$$

Par ailleurs (31) et (32) peuvent s'écrire matriciellement :

$$A^{[1]} = A \otimes M^{[1]} \qquad (35)$$

et

$$B^{[1]} = B \otimes M^{[1]} \qquad (36)$$

où la matrice $M^{[1]} \in M_n(E)$ est la matrice de transformation définie par :

$$M^{[1]} = \begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{11} \otimes a_{12} & a^*_{11} \otimes a_{13} & \cdots & a^*_{11} \otimes a_{1n} \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \cdots & . \\ . & . & & \cdots & . \\ . & . & & \cdots & . \\ \varepsilon & \varepsilon & . & \cdots & e \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire la matrice déduite de la matrice identité de $M_n(E)$ en remplaçant les termes de la première ligne par :

$$\begin{cases} m^{[1]}_{11} = a^*_{11} \\ m^{[1]}_{1j} = a^*_{11} \otimes a_{1j} \quad (j=2,\ldots,n) \end{cases}$$

(pour les termes de la première colonne de $A^{[1]}$, (31) donne : $a^{[1]}_{j1} = a_{j1} \otimes (e \oplus a^*_{11} \otimes a_{11})$ $= a_{j1} \otimes a^*_{11}$; de la même façon (32) donne $b^{[1]}_{j1} = b_{j1} \otimes a^*_{11}$)

Par analogie avec la méthode de Gauss-Jordan classique, nous dirons que (34) est déduit de (26)' par pivot sur la première ligne et la première colonne (l'élément a_{11} est appelé l'*élément pivot*).

Il est maintenant facile de voir que la technique d'élimination explicitée ci-dessus peut être itérée : comme A* existe, $a_{22}^{[1]}$ est quasi-inversible et l'élément $a_{22}^{[1]}$ peut être utilisé comme pivot pour éliminer toutes les variables de la deuxième colonne de Y. En notant $Y^{[2]}$ la matrice déduite de $Y^{[1]}$ en remplaçant tous les termes de la deuxième colonne par ε, le système obtenu à la deuxième itération s'écrit :

$Y = Y^{[2]} \otimes A^{[2]} \oplus B^{[2]}$

où $A^{[2]} = A^{[1]} \otimes M^{[2]}$

$B^{[2]} = B^{[1]} \otimes M^{[2]}$

$M^{[2]}$ étant la matrice déduite de la matrice identité I en remplaçant la deuxième ligne par :

$$\begin{cases} m_{22}^{[2]} = (a_{22}^{[1]})^* \\ m_{2j}^{[2]} = (a_{22}^{[1]})^* \otimes a_{2j}^{[1]} \end{cases}$$

D'une façon générale, les matrices $A^{[k]}$ et $B^{[k]}$ sont définies récursivement par

$$A^{[0]} = A \qquad B^{[0]} = B \tag{37}$$

et, ∀ k = 1, 2,.... n :

$$A^{[k]} = A^{[k-1]} \otimes M^{[k]} \tag{38}$$

$$B^{[k]} = B^{[k-1]} \otimes M^{[k]} \tag{39}$$

avec $M^{[k]}$ déduite de I en remplaçant la ligne k par :

$$\begin{cases} m_{kk}^{[k]} = (a_{kk}^{[k-1]})^* & (40) \\ m_{kj}^{[k]} = (a_{kk}^{[k-1]})^* \otimes a_{kj}^{[k-1]} & (41) \end{cases}$$

On a alors :

Théorème 7

Soit $A \in M_n(E)$ où $(E, \oplus, \otimes)$ est un dioïde dans lequel toute suite croissante majorée a une limite. On suppose que A admet une quasi-inverse A^*.

Alors $Y = B^{[n]}$ obtenu par (37) - (41) est solution minimale du système

$$Y = Y \otimes A \oplus B \tag{26'}$$

Dans le cas particulier où $B = B^{[0]} = I$, alors $B^{[n]}$ est la quasi-inverse A* de A.

Démonstration

Toutes les opérations intermédiaires effectuées dans l'application des relations de récurrence (37) - (41) respectent chacune des équations de (26)'. La matrice $Y = B^{[n]}$ obtenue à la $n^{ième}$ itération est donc bien une solution.

Le fait qu'il s'agit d'une solution minimale peut aisément se démontrer par récurrence de la façon suivante.

Soit $\overline{Y} = (\overline{y}_{ij})$ une solution quelconque de (26)'. A l'itération 1, $\overline{Y}$ vérifie donc :

$\forall$ i = 1... n :

$$y_{i1} = y_{i1} \otimes a_{11} \oplus \sum_{j=2}^{n} y_{ij} \otimes a_{j1} \oplus b_{i1} \qquad (42)$$

$\overline{Y}$ est donc une solution de (42)

Par suite $\overline{y}_{i1}$ est solution de :

$$y_{i1} = y_{i1} \otimes a_{11} \oplus \sum_{j=2}^{n} \overline{y}_{ij} \otimes a_{j1} \oplus b_{il}$$

et par suite :

$$\overline{y}_{i1} \geq \left(\sum_{j=2}^{n} \overline{y}_{ij} \otimes a_{j1} \oplus b_{i1} \right) a_{11}^{*}$$

Ceci montre que $\overline{Y}$ satisfait le système (34) obtenu à la fin de la première itération avec l'inégalité, autrement dit que :

$$\overline{Y} \geq \overline{Y}^{[1]} \otimes A^{[1]} \oplus B^{[1]} = \overline{Y}^{[1]} \otimes A^{[1]} \oplus B \otimes M^{[1]}$$

Il existe donc une matrice $H^{[1]} \in M_n(E)$ telle que $\overline{Y}$ satisfait

$$\overline{Y} = \overline{Y}^{[1]} \otimes A^{[1]} \oplus B \otimes M^{[1]} \oplus H^{[1]} \qquad (43)$$

La deuxième itération, correspondant à l'élimination de toutes les variables y_{i2}, réalisée sur le système (43) conduirait de façon analogue à montrer que $\overline{Y}$ satisfait :

$$\overline{Y} \geq \overline{Y}^{[2]} \otimes A^{[2]} \oplus \left(B \otimes M^{[1]} \oplus H^{[1]}\right) \otimes M^{[2]}$$

Il existe donc une matrice $H^{[2]} \in M_n(E)$ telle que :

$$\overline{Y} = \overline{Y}^{[2]} \otimes A^{[2]} \oplus \left(B \otimes M^{[1]} \oplus H^{[1]}\right) \otimes M^{[2]} \oplus H^{[2]}$$

On peut donc en déduire, par induction, l'existence de matrices $H^{[1]}$ $H^{[2]}$... $H^{[n]}$ telles que $\overline{Y} = Y^{[n]} \otimes A^{[n]} \oplus \left(\left(\left(\ldots\left(B \otimes M^{[1]} \oplus H^{[1]}\right) \ldots \otimes M^{[2]} \oplus H^{[2]}\right) \otimes \ldots\right) M^{[n]} \oplus H^{[n]}\right)$

$$\text{comme } Y^{[n]} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon \\ \varepsilon & & & \\ & & & \\ & & & \\ \varepsilon & & & \varepsilon \end{bmatrix}$$

on en déduit que

$\overline{Y} \geq B \otimes M^{[1]} \otimes M^{[2]} \otimes \ldots \otimes M^{[n]} \quad = \quad B^{[n]}$

Ceci prouve que $B^{[n]}$ est solution minimale de (26)'. □

5.2. MÉTHODE DE GAUSS-JORDAN GÉNÉRALISÉE : ALGORITHMES

Plaçons-nous dans le cas où B = I. L'application des formules de récurrence (37) - (41) permet alors de construire la quasi-inverse A^* de A.

On a, dans ce cas :

$B^{[n]} = A^* = M^{[1]} \otimes M^{[2]} \otimes \ldots \otimes M^{[n]}$

et :

$$\begin{aligned} A^{[n]} &= A \otimes M^{[1]} \otimes M^{[2]} \otimes \ldots \otimes M^{[n]} \\ &= A \otimes B^{[n]} \\ &= A \otimes A^* \\ &= A^+ \end{aligned}$$

On voit que pour calculer $A^{[n]} = A^+$ on a seulement besoin d'utiliser la formule de récurrence (38). A^* se déduit ensuite directement de A^+ par : $A^* = I \oplus A^+$.

Comme $M^{[k]}$ ne dépend que de $A^{[k-1]}$, cette remarque montre qu'on peut calculer A^* en ne travaillant à chaque itération qu'avec une seule matrice $A^{[k]}$.

On a alors :

Algorithme 4 **(Gauss-Jordan généralisé)**

Calcul des matrices A^+ et A^*

(a) Poser $A^{[0]} = A$

(b) Pour k = 1, 2,... n successivement faire :

$a_{kk}^{[k]} = \left(a_{kk}^{[k-1]}\right)^*$

pour i = 1... n

pour j = 1... n

Si ($i \neq k$ ou $j \neq k$) faire :

$a_{ij}^{[k]} = a_{ij}^{[k-1]} \oplus a_{ik}^{[k-1]} \otimes a_{kk}^{[k]} \otimes a_{kj}^{[k-1]}$

(c) A la fin de l'étape (b) on obtient $A^+ = A^{[n]}$. On en déduit alors A^* par :

$A^* = A^{[n]} \oplus I$.

Le résultat suivant établit la complexité de *l'algorithme 3*.

Proposition 5.2.1

L'algorithme 4 demande N calculs de quasi-inverse d'un élément, et $\mathcal{O}(n^3)$ opérations $\oplus$ et $\otimes$.

Démonstration

Chaque itération exige le calcul de $\left(a_{kk}^{[k-1]}\right)^*$ (quasi-inverse de l'élément pivot) et $O(n^2)$ opérations $\oplus$ et $\otimes$. On en déduit le résultat. □

Un cas particulier intéressant est celui où le graphe G(A) ne contient pas de circuit 0-absorbant. Dans ce cas, $a_{kk}^{[k-1]}$ est un élément 0-stable donc $a_{kk}^{[k]} = \left(a_{kk}^{[k-1]}\right)^* = e$.

L'algorithme 4 se spécialise alors de la façon suivante :

Algorithme 4'

Calcul de A^+ et A^* dans le cas où G(A) ne contient pas de circuit 0-absorbant

(a) $A^{[0]} = A$

(b) Pour k = 1...n

pour i = 1... n

pour j = 1... n

faire : $a_{ij}^{[k]} \leftarrow a_{ij}^{[k-1]} \oplus a_{ik}^{[k-1]} \otimes a_{kj}^{[k-1]}$

(c) $A^+ = A^{[n]}$ et $A^* = I \oplus A^{[n]}$

Dans le cas du problème du plus court chemin dans un graphe sans circuit de longueur négative ($\oplus$ = Min, $\otimes$ = +) l'Algorithme 4' n'est autre que l'algorithme de FLOYD (1962).

5.3. MÉTHODE "ESCALIER" GÉNÉRALISÉE

A étant une matrice n x n à éléments dans un dioïde E, pour tout $k \in [1, n]$ notons $A_{\{k\}}$ la sous-matrice de A formée par les k premières lignes et les k premières colonnes de A. Avec cette notation on a : $A = A_{\{n\}}$.

Le principe de la méthode "escalier" est de déterminer $(A_{\{2\}})^*$ à partir de $(A_{\{1\}})^* = a_{11}^*$; puis $(A_{\{3\}})^*$ à partir de $(A_{\{2\}})^*$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir $A^* = (A_{\{n\}})^*$ à partir de $(A_{\{n-1\}})^*$.

Pour mettre en œuvre cette récurrence sous forme d'un algorithme, nous utiliserons la formule de quasi-inversion par blocs donnée par le résultat suivant.

Proposition 5.3.1

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde et $U \in M_k(E)$ $(k \geq 2)$ une matrice supposée partitionnée en blocs sous la forme :

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

avec $U_{11} \in M_{k-1}(E)$ et où :

U_{12} est de dimensions (k - 1) x 1,

U_{21} est de dimensions 1 x (k - 1)

$U_{22} \in E$.

On suppose que la sous-matrice U_{11} est quasi-inversible avec pour quasi-inverse U_{11}^*, que l'élément U_{22} est quasi-inversible dans E, et que l'élément $\mu = U_{21} \otimes U_{11}^* \otimes U_{12} \oplus U_{22}$ est quasi-inversible dans E.

Alors U est quasi inversible dans $M_k(E)$ et $U^* = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ est donnée par les formules :

$$X_{11} = U_{11}^* \oplus U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^* \otimes U_{21} \otimes U_{11}^* \quad (44)$$

$$X_{12} = U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^* \quad (45)$$

$$X_{21} = \mu^* \otimes U_{21} \otimes U_{11}^* \quad (46)$$

$$X_{22} = \mu^* = (U_{21} \otimes U_{11}^* \otimes U_{12} \oplus U_{22})^* \quad (47)$$

Démonstration

Montrons l'existence d'une solution minimale aux équations matricielles :

$X = \quad U \otimes X \oplus I_k$ (48)

$X = \quad X \otimes U \oplus I_k$ (49)

où $X \in M_k(E)$ peut être partitionnée en blocs :

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

(48) entraîne, en particulier :

$X_{12} = U_{11} \otimes X_{12} \oplus U_{12} \otimes X_{22}$ (50)

$X_{22} = U_{21} \otimes X_{12} \oplus U_{22} \otimes X_{22} \oplus e$ (51)

Comme U_{11} est quasi-inversible, (50) a une solution minimale en X_{12} pour toute valeur de X_{22}, laquelle s'écrit :

$X_{12} = U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes X_{22}$

En utilisant cette relation, (51) s'écrit :

$X_{22} = (U_{21} \otimes U_{11}^* \otimes U_{12} \oplus U_{22}) \otimes X_{22} \oplus e$

soit encore :

$X_{22} = \mu \otimes X_{22} \oplus e$

μ étant supposé quasi-inversible, l'équation ci-dessus a une solution minimale qui s'écrit :

$X_{22} = \mu^*$ (47)

d'où l'on déduit :

$X_{12} = U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^*$ (45)

De façon analogue (49) conduit aux quatre relations :

$X_{11} = X_{11} \otimes U_{11} \oplus X_{12} \otimes U_{21} \oplus I_{k-1}$ (52)

$X_{21} = X_{21} \otimes U_{11} \oplus X_{22} \otimes U_{21}$ (53)

$X_{12} = X_{11} \otimes U_{12} \oplus X_{12} \otimes U_{22}$ (54)

$X_{22} = X_{21} \otimes U_{12} \oplus X_{22} \otimes U_{22} \oplus e$ (55)

En utilisant (45), (52) se réécrit :

$X_{11} = X_{11} \otimes U_{11} \oplus U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^* \otimes U_{21} \oplus I_{k-1}$

et, comme U_{11} est quasi-inversible, cette dernière équation a une solution minimale en X_{11}, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} X_{11} &= (U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^* \otimes U_{21} \oplus I_{k-1}) \otimes U_{11}^* \\ &= U_{11}^* \oplus U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^* \otimes U_{21} \otimes U_{11}^* \qquad (44) \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant (47) et la quasi-inversibilité de U_{11}, (53) permet d'obtenir la solution minimale en X_{21} :

$$X_{21} = \mu^* \otimes U_{21} \otimes U_{11}^* \qquad (46)$$

On a ainsi obtenu les expressions (44) - (47) en exploitant deux des relations issues de (48) et deux des relations issues de (49). Il reste à vérifier que X ainsi obtenue satisfait par exemple les deux autres relations (54) et (55) déduites de (49). L'expression $X_{11} \otimes U_{12} \oplus X_{12} \otimes U_{22}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
&(U_{11}^* \oplus U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^* \otimes U_{21} \otimes U_{11}^*) \otimes U_{12} \oplus U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^* \otimes U_{22} \\
= \quad & U_{11}^* \otimes U_{12} \oplus (U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^*) \otimes (U_{21} \otimes U_{11}^* \otimes U_{12} \oplus U_{22}) \\
= \quad & U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes (e \oplus \mu^* \otimes \mu) \\
= \quad & U_{11}^* \otimes U_{12} \otimes \mu^* \\
= \quad & X_{12} \qquad \text{d'après (45)}
\end{aligned}$$

L'expression $X_{21} \otimes U_{12} \oplus X_{22} \otimes U_{22} \oplus e$ s'écrit

$$\begin{aligned}
& \mu^* \otimes U_{21} \otimes U_{11}^* \otimes U_{12} \oplus \mu^* \otimes U_{22} \oplus e \\
= \quad & \mu^* \otimes (U_{21} \otimes U_{11}^* \otimes U_{12} \oplus U_{22}) \oplus e \\
= \quad & \mu^* \otimes \mu \oplus e = \mu^* = X_{22} \quad \text{d'après (47).}
\end{aligned}$$

X donnée par (44) - (47) vérifie donc bien (49).

De plus, par construction, il s'agit bien d'une solution minimale. On en déduit que U est quasi-inversible avec $U^* = X$. □

Pour déterminer la quasi-inverse d'une matrice A (supposée quasi-inversible) on peut alors déduire directement de la Proposition 5.3.1 l'algorithme général suivant.

***Algorithme 5* (méthode "escalier" généralisée)**

Détermination de A^* pour $A \in M_n(E)$ supposée quasi-inversible.

Poser $\qquad A_{\{1\}}^* = a_{11}^*$

Pour $k = 2, \ldots, n$ faire :

$$A_{\{k\}} = \left[\begin{array}{c|c} A_{\{k-1\}} & v_{k-1} \\ \hline w_{k-1} & a_{kk} \end{array}\right]$$

où :

- v_{k-1} est le vecteur-colonne constitué par les k - 1 premiers termes de la k$^{\text{ième}}$ colonne de A.

- w_{k-1} est le vecteur-ligne constitué par les k-1 premiers termes de la $k_{ième}$ ligne
  de A.

Calculer :

$$\mu^* = (w_{k-1} \otimes A^*_{\{k-1\}} \otimes v_{k-1} \oplus a_{kk})^*$$

$$\overline{v}_{k-1} = A^*_{\{k-1\}} \otimes v_{k-1} \qquad (56)$$

$$\overline{w}_{k-1} = w_{k-1} \otimes A^*_{\{k-1\}} \qquad (57)$$

puis déduire :

$$A^*_{\{k\}} = \left[\begin{array}{c|c} A^*_{\{k-1\}} \oplus \overline{v}_{k-1} \otimes \mu^* \otimes \overline{w}_{k-1} & \overline{v}_{k-1} \otimes \mu^* \\ \hline \mu^* \otimes \overline{w}_{k-1} & \mu^* \end{array}\right]$$

A la fin des itérations, on obtient $A^* = A^*_{\{n\}}$.

Notons que dans l'expression de $A^*_{[k]}$ les vecteurs $\overline{v}_{k-1} \otimes \mu^*$ et $\mu^* \otimes \overline{w}_{k-1}$ déduits de (56) et (57) correspondent à (45) et (46) respectivement. D'autre part, l'expression

$A^*_{\{k-1\}} \oplus \overline{v}_{k-1} \otimes \mu^* \otimes \overline{w}_{k-1}$ se réécrit :

$A^*_{\{k-1\}} \oplus A^*_{\{k-1\}} \otimes v_{k-1} \otimes \mu^* \otimes w_{k-1} \otimes A^*_{\{k-1\}}$

qui n'est autre que la relation (44).

Proposition 5.3.2

L'algorithme 5 nécessite $\mathcal{O}(n^3)$ opérations $\oplus$ et $\otimes$, ainsi que n calculs de quasi-inverse d'un élément de E.

Démonstration

Sur l'ensemble des étapes, l'algorithme effectue n calculs de quasi-inverse d'un élément de E. Par ailleurs, à chaque itération k l'algorithme réalise sur des matrices d'ordre k-1 et des vecteurs de dimension k-1 :

- trois multiplications matrice-vecteur nécessitant $\mathcal{O}(k^2)$ opérations $\oplus$ et $\otimes$;
- un produit scalaire de deux vecteurs nécessitant $\mathcal{O}(k)$ opérations $\oplus$ et $\otimes$;
- un produit d'un vecteur-colonne $(\overline{v}_{k-1})$ par un vecteur-ligne $(\mu^* \otimes \overline{w}_{k-1})$ suivi d'une somme de deux matrices, ce qui nécessite $\mathcal{O}(k^2)$ opérations $\oplus$ et $\otimes$.

Le résultat s'en déduit par sommation sur k de 2 à n. □

Un cas particulier intéressant est celui où le graphe G (A), associé à la matrice A, est sans circuit 0-absorbant.

Dans ce cas on a, à chaque itération de l'algorithme 5, $\mu^* = e$, et l'algorithme 5 peut se réexprimer sous la forme simplifiée suivante :

Algorithme 5'

Calcul de A* à partir de A par la méthode "escalier" généralisée (cas où G(A) est sans circuit 0-absorbant).

$a_{11} \leftarrow e$

Pour k = 2 à n faire :

(a) $a_{kk} \leftarrow e$

(b) Pour i = 1, …, k - 1 :

$$a_{i,k} \leftarrow \sum_{j=1}^{k-1} a_{i,j} \otimes a_{j,k}$$

$$a_{k,i} \leftarrow \sum_{j=1}^{k-1} a_{k,j} \otimes a_{j,i}$$

(c) Pour i = 1, …, k - 1

Pour j = 1, …, k - 1

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} \oplus a_{ik} \otimes a_{kj}$

Dans le cas du problème du plus court chemin ($\oplus$ = Min, $\otimes$ = +) l'Algorithme 5' n'est autre que l'algorithme de DANTZIG (1966).

Annexe 1 : Dioïde à gauche et plus court chemin avec gains ou pertes

Soit $G = [X, U]$ un graphe orienté sur lequel va circuler un type de produit donné. A chaque arc $u = (i, j) \in U$ on associe deux nombres :

- c_{ij} représentant le coût unitaire de transport du produit entre i et j.
- $m_{ij} > 0$ représentant le coefficient de perte (si $m_{ij} < 1$) ou de gain (si $m_{ij} > 1$) du produit lors du transport de i à j (autrement dit, si q_i est la quantité de produit disponible en i, la quantité disponible en j après passage sur l'arc (i, j) est $m_{ij}\, q_i$).

Considérons deux sommets quelconques $i \in X$ et $j \in X$ et $\mu \in P_{ij}$ un chemin joignant ces deux sommets :
$\mu = \{(i_0, i_1)\,(i_1, i_2), \ldots\,(i_{p-1}, i_p)\}$ (avec $i = i_0$ et $j = i_p$).
Notons c (μ) le coût de transport d'une unité de produit entre i et j par le chemin μ, et m (μ) le coefficient de gain (ou de perte) global le long du chemin μ.
Ces quantités sont définies par les relations de récurrence suivantes :
Si $\mu = \emptyset$: $c(\mu) = 0$; $m(\mu) = 1$.
Si μ est un chemin entre i et j et $\mu' = \mu \cup \{(j, k)\}$ un chemin entre i et k, alors

$$c(\mu') = c(\mu) + m(\mu)\, c_{jk}$$
$$m(\mu') = m(\mu)\,.\,m_{jk}$$

Le problème du plus court chemin avec gains (ou pertes) est de déterminer le chemin de coût unitaire minimum entre deux sommets i et j donnés, autrement dit de minimiser le rapport $\dfrac{c(\mu)}{m(\mu)}$ sur l'ensemble P_{ij} des chemins μ joignant i à j.

1) On considère l'ensemble $E = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ muni des opérations $\oplus$ et $\otimes$ définies de la façon suivante :

$$\binom{c}{m} \oplus \binom{c'}{m'} = \begin{cases} \binom{c}{m} & \text{si } \dfrac{c}{m} < \dfrac{c'}{m'}, \text{ ou si } \\ & \dfrac{c}{m} = \dfrac{c'}{m'} \text{ et } m = \mathrm{Max}\{m, m'\} \\ \left(\dfrac{c'}{m'}\right) & \text{si } \dfrac{c}{m} > \dfrac{c'}{m'} \text{ ou si} \\ & \dfrac{c}{m} = \dfrac{c'}{m'}, \text{ et } m' = \mathrm{Max}\{m, m'\} \end{cases}$$

$$\binom{c}{m} \otimes \binom{c'}{m'} = \binom{c + mc'}{m\, m'}$$

On remarquera que $\otimes$ n'est pas commutative et seulement distributive à gauche par rapport à $\oplus$.

Vérifier que $(E, \oplus, \otimes)$ est un *dioïde à gauche*. On notera ε et e les éléments neutres de $\oplus$ et $\otimes$ respectivement.

2) La matrice d'incidence A de G est la matrice $N \times N$ ($N = |X|$) définie par :

$$\begin{cases} a_{ij} = \begin{pmatrix} c_{ij} \\ m_{ij} \end{pmatrix} & \text{si } (i, j) \in U \\ a_{ij} = \varepsilon & \text{si } (i, j) \notin U \\ a_{ii} = e & \forall\, i \in X \end{cases}$$

Le poids w (μ) d'un chemin $\mu \in P_{ij}$ quelconque, $\mu = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2) \dots (i_{p-1}, i_p)\}$ est défini comme le produit (dans cet ordre)) :

$w(\mu) = a_{i_0, i_1} \otimes a_{i_1, i_2} \otimes \dots \otimes a_{i_{p-1}, i_p}$

En utilisant seulement la distributivité à gauche de $\otimes$ par rapport à $\oplus$, montrer que l'on a bien :

$$\left(A^k\right)_{i,j} = \sum_{\mu \in P_{ij}^k} w(\mu)$$

et :

$$\left(A^{(k)}\right)_{i,j} = \sum_{\mu \in P_{ij}^{(k)}} w(\mu)$$

3) On dit que G est sans circuit 0-absorbant à gauche si, pour chaque circuit élémentaire γ de G, on a, $\forall\, a \in E : a \oplus a \otimes w(\gamma) = a$

G étant supposé sans circuit 0-absorbant à gauche, démontrer que l'on a :

$$\left(A^k\right)_{i,j} = \sum_{\mu \in P_{ij}^k(0)} w(\mu)$$

et

$$\left(A^{(n-1)}\right)_{i,j} = \sum_{\mu \in P_{ij}(0)} w(\mu)$$

(où $P_{ij}^k(0)$ est l'ensemble des chemins élémentaires de k arcs et $P_{ij}(0)$ l'ensemble des chemins élémentaires entre i et j).

Déduire de ce qui précède :

$$A^{(n-1)} = \lim_{k \to \infty} A^{(k)} = A^*$$

où A^* vérifie :

$$A^* = A^* \otimes A \oplus I$$

4) Montrer que, lorsque certains c_{ij} peuvent être < 0, G est sans circuit 0-absorbant à gauche si et seulement si tout circuit γ vérifie $c(\gamma) \geq 0$ et $m(\gamma) = 1$.
Lorsque tous les c_{ij} sont ≥ 0, montrer que G est sans circuit 0-absorbant à gauche, si et seulement tout circuit γ vérifie $m(\gamma) \leq 1$.

5) Vérifier alors que les algorithmes de JACOBI, de GAUSS-SEIDEL et de GAUSS JORDAN généralisés s'appliquent à la résolution du problème de plus court chemin avec gains (ou pertes) dans un graphe sans circuit 0-absorbant à gauche.

6) En tenant compte du fait que $\oplus$ est sélective et, sous l'hypothèse supplémentaire que $e = \binom{0}{1}$ est le plus grand élément de E ($\forall\ a \in E : a \oplus e = e$), montrer que l'algorithme de DIJKSTRA généralisé (cf. § 4.3) s'applique également.
Vérifier que les hypothèses ci-dessus sont satisfaites lorsque, pour chaque arc (i, j) de G :
$c_{ij} \geq 0$
$0 < m_{ij} \leq 1$.

[Eléments de réponse : CHARNES & RAIKE (1966), BAKO (1974), GONDRAN (1976)].

Remerciements

Je remercie la Direction des Etudes et Recherches d'EDF (et, en particulier, M. M. GONDRAN), pour son soutien à la recherche présentée ici.

Bibliographie

BACCELLI F., COHEN G., OLSDER G.J., QUADRAT J.P. (1992), *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems*, J. Wiley & Sons, 489 pp.

BACKHOUSE R.C., CARRÉ B.A. (1975), Regular Algebra Applied to Path Finding Problems, *Journal Inst. Math. Appl.*, 15, pp. 161-186.

BAKO A. (1974), Solution of the Multiterminal Minimal Path Problem in a Network with Gains, in *Progress in Operations Research* (A. Prekopa Ed.).

BELLMAN R.E. (1958), On a routing problem, *Quart. Appl. Math.* 16, pp 87-90.

BENZAKEN C. (1968), Structures algébriques des cheminements : pseudo-treillis, gerbiers de carré nul, in *Network and Switching Theory* (G. Biorci Ed.), Academic Press, NY, pp. 40-57.

BENZECRI J.P. (1974), *L'Analyse des Données* : Tome 1 : *Taxinomie*, Dunod, Paris.

BERGE C. (1958), *La Théorie des graphes et ses applications*, Dunod Paris.

BERGE C. (1970), *Graphes et Hypergraphes*, Dunod Paris.

BORCHARDT C.W. (1860), Uber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante, *J. Reine Angew.Math*, 57, pp. 111-121.

BOROS E., ATKIN A.O.L., CECHLÁROVÁ K., PELED U.N. (1997), Powers of Circulants in Bottleneck Algebra, *Linear Algebra and its Appl.*, 258, pp. 137-148.

BRAMS G.W. (1983), *Réseaux de Petri : Théorie et Pratique*, Masson, Paris.

BRUALDI R.A., RYSER H.J. (1991), *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, 367 pp.

BURKARD R.E. (1977), An Algebraic Approach To Assignment Problems, *Math. Programming*, 12, pp. 318-327.

BUTKOVIC P., CECHLÁROVÁ K., SZABÓ P. (1987), Strong Linear Independence in Bottleneck Algebra, *Linear Algebra and its Appl.* 94, pp. 133-155.

CARRÉ B.A. (1971), An Algebra for Network Routing Problems, *J. Inst. Math. Appl.*, 7, pp. 273-294.

CARRÉ B.A. (1971), An Algebra for Network Routing Problems, *J. Inst. Math. Appl.*, 7, pp. 273-294.

CARTIER P., FOATA D. (1969), *Problèmes Combinatoires de Commutation et Réarrangement.* Lecture Notes, in *Mathematics*, 85, Springer Verlag, Berlin.

CAYLEY A. (1854), Sur les déterminantes gauches, *Crelle's J.*, 38, pp. 93-96.

CECHLÁROVÁ K. (1992), Eigenvectors in Bottleneck Algebra, *Linear Algebra and Its Appl.* 175, pp. 63-73.

CHAIKEN S. (1982), A Combinatorial Proof of the All- Minors Matrix Theorem, *S.I.A.M. J. Algebraic and Discrete Methods* 3, pp. 319-329.

CHARNES A., RAIKE W.M. (1966), One-Pass Algorithms for Some Generalized Network Problems, *Operations Research* 14, pp. 914-923.

CHEN W.K. (1976), *Applied Graph Theory : Graphs and Electrical Networks*, North Holland.

CHRÉTIENNE P. (1983), *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse, Université Paris 6.

COHEN G., DUBOIS D., QUADRAT J.P., VIOT M. (1983), *Analyse du comportement périodique de systèmes de production par la théorie des dioïdes*, Rapport Technique 191, INRIA, Rocquencourt.

COHEN G., DUBOIS D., QUADRAT J.P., VIOT M. (1985), A Linear-System Theoretic view of Discrete Event Processes and its use for Performance Evaluation in Manufacturing, *IEEE Trans. on Autom. Control AC-30*, 3, pp. 210-220.

COHEN G., MOLLER P., QUADRAT J.P., VIOT M. (1989), Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems, *I.E.E.E. Proceedings, Special Issue on Discrete Event Systems*, 77, n° 1.

COLLOMB P., GONDRAN M. (1977), Un algorithme efficace pour l'arbre de classification, *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle*, vol. 1, pp. 31-49.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1962), Describing Industrial Processes with Inference and approximating their Steady State Behaviour, *Operational Res. Quart.* 13, pp. 95-100.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1976), Projections in a Minimax Algebra, *Math Progr.* 10, pp. 111-123.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1979), Minimax Algebra, Lecture Notes, in *Economics and Mathematical Systems* 166, Springer, New York.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1991), Algebraic Realization of Discrete Dynamical Systems, *Proceedings of the 1991 IFAC Workshop on Discrete Event System Theory and Applications in Manufacturing and Social Phenomena*, International Academic Publishers, pp. 11-15.

CUNINGHAME-GREEN R.A., MEIJER P.F.J. (1980), An Algebra for Piecewise-linear Minimax Problems, *Discrete Appl. Math.* 2, pp. 267-294.

DANTZIG G.B. (1966), All Shortest Routes in a Graph, dans *Théorie des Graphes*, Proceedings Int. Symp. Rome, Italy, Dunod, Paris, pp. 91-92.

DANTZIG G.B., BLATTNER W.O., RAO M.R. (1967), Finding a Cycle in a Graph with Minimum Cost-to-Time Ratio with Application to a Ship Routing Problem, in *Théorie des graphes*, proceedings int. symp. Rome, Italy, Dunod, Paris, pp. 209-214.

DEFAYS D. (1978), Analyse hiérarchique des Préférences et généralisations de la transitivité, *Math. Sc. Hum.*, n° 61, pp. 5-27.

DIJKSTRA E.W. (1959), A Note on Two Problems in Connection with Graphs, *Numerische Mathematik* 1, pp. 269-271.

DUBOIS D., STECKE K.E. (1990), Dynamic Analysis of Repetitive Decision - Free Discrete Event Processes : The Algebra of Timed Marked Graphs and Algorithmic Issues, *Annals of Operations Research* 26, pp. 151-193.

EILENBERG S. (1974), *Automata, Languages and Machines*, Academic Press.

FLOYD R.W. (1962), Algorithm 97 : Shortest Path, *Comm. A.C.M.* 5, p. 345.

FOATA D. (1965), *Etude algébrique de certains problèmes d'Analyse Combinatoire et du Calcul des Probabilités*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 14.

FOATA D. (1980), A Combinatorial Proof of Jacobi's Identity, *Annals Discrete Maths* 6, pp. 125-135.

FORD L.R. Jr (1956), Network Flow Theory, *The Rand Corporation*, p. 293.

GAUBERT S. (1992), *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*, Thèse, Ecole des Mines de Paris.

GAUBERT S. (1995a), Performance evaluation of (Max, +) Automata", *IEEE Trans. Automatic Control* 40 (12), pp. 2014-2025.

GAUBERT S. (1995b), Resource Optimization and (Min, +) Spectral Theory, *IEEE Trans. Automatic Control* 40 (12), pp. 1931-1934.

GAUBERT S., MAIRESSE J. (1998), Modeling and Analysis of Timed Petri Nets using Heaps of Pieces, *IEEE Trans. Automatic Control*, à paraître.

GAUBERT S., BUTKOVIC P., CUNINGHAME-GREEN R. (1998), Minimal (Max, +) Realizations of Convex Sequences, *SIAM Journal Control Optim.* 36, 1, pp. 137-147.

GONDRAN M. (1974), Algèbre linéaire et Cheminement dans un Graphe, *R.A.I.R.O.*, vol. 1, pp. 77-99.

GONDRAN M. (1975), Path Algebra and Algorithms, in *Combinatorial Programming : Methods and Applications* (B. Roy Ed.) D. Reidel Publish Co., pp. 137-148.

GONDRAN M. (1976a), Valeurs Propres et Vecteurs Propres en Classification Hiérarchique, *R.A.I.R.O. Informatique Théorique*, 10, 3, pp. 39-46.

GONDRAN M. (1976b), *Des algèbres de chemins très générales : les semi-anneaux à gauche et à droite*, Note interne EDF 2194/02, non publié.

GONDRAN M. (1995), Valeurs Propres et Vecteurs Propres en Analyse des Préférences ou Trois solutions du paradoxe de Condorcet, Note EDF HI-00/95-001.

GONDRAN M., MINOUX M. (1977), Valeurs propres et Vecteurs propres dans les Dioïdes et leur Interprétation en Théorie des Graphes, *Bull. Dir. Et. Rech. EDF*, Série C, pp. 24-41.

GONDRAN M., MINOUX M. (1978), L'indépendance linéaire dans les Dioïdes, *Bull. Dir. Et. Rech. EDF*, Série C, n° 1, pp. 67-90.

GONDRAN M., MINOUX M. (1979), *Graphes et Algorithmes*, Eyrolles, Paris, 3e édition revue et augmentée 19950.

GONDRAN M., MINOUX M. (1979), Valeurs propres et Vecteurs propres en Théorie des graphes, Colloques Internationaux, CNRS Paris 1978, pp. 181-183. *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems* 166, Springer Verlag, Berlin.

GONDRAN M., MINOUX M. (1984), Linear Algebra in Dioïds. A survey of recent results, in *Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research* (BURKARD R.E., CUNINGHAME-GREEN R.A., ZIMMERMANN U. Editors), *Annals of Discrete Mathematics* 19, pp. 147-164.

GRAHAM S.L., WEGMAN M. (1976), A Fast and Usually Linear Algorithm for Global Flow Analysis, *Journal ACM*, 23, 1, pp. 172-202.

GUNAWARDENA J. (1998), *Idempotency*, Publications of the Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

HALPERN J., PRIESS I. (1974), Shortest Paths with Time Constraints on Movement and Parking, *Networks*, 4, pp. 241-253.

HAMMER P.L., RUDEANU S. (1968), *Boolean Methods in Operations Research*, Springer Verlag.

HOFFMAN A.J. (1963), On Abstract dual Linear Programs, *Naval Research Logistics Quarterly* 10, pp. 369-373.

HU T.C. (1961), The Maximum Capacity Route Problem, *Operations Research* 9, pp. 898-900.

HU T.C. (1967), Revised Matrix Algorithms for Shortest Paths, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, 15, 1, pp. 207-218.

KAILATH T. (1980), *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

KARP R.M. (1978), A Characterization of the minimum cycle mean in a digraph, *Discrete Mathematics* 23, pp. 309-311.

KAUFMANN A., MALGRANGE Y. (1963), Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe, *R.I.R.O.*, 26, pp. 61-73.

KLEENE S.C. (1956), "Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata" in *Automata Studies* (Shannon & Mc Carthy Editors), Princeton University Press, pp. 3-40.

KUNTZMANN J. (1972), *Théorie des Réseaux*, Dunod, Paris.

LALLEMENT G. (1979), *Semigroups and Combinatorial Applications*, J. Wiley & Sons.

LAUE H. (1988), A Graph Theoretic proof of the fundamental trace identity, *Discrete Math* 69, pp. 197-198.

LAWLER E.L. (1967), Optimal Cycles in doubly Weighted Directed Linear Graphs, in *Théorie des Graphes*, Proc. Int. Symp., Rome, Italy, (1966), Dunod, Paris, pp. 209-213.

LEHMANN D.J. (1977), Algebraic Structures for Transitive Closure, *Theor. Comput. Sc.*, 4, pp. 59-76.

MACMAHON P.A. (1915), *Combinatory Analysis*, Cambridge University Press et Chelsea Publishing Co., New York, 1960.

MINIEKA E., SHIER D.R. (1973), A Note on an Algebra for the k Best Routes in a Network, *J. Inst. Math. Appl.*, 11, pp. 145-149.

MINOUX M. (1975), Plus courts chemins avec contraintes, *Annales des Télécommunications* 30, n° 11-12, pp. 383-394.

MINOUX M. (1976), Structures algébriques généralisées des problèmes de cheminement dans les graphes : Théorèmes, Algorithmes et Applications, *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle*, vol. 10, n° 6, pp. 33-62.

MINOUX M. (1977), Generalized Path Algebras, in *Surveys of Mathematical Programming* (A. PREKOPA Editor) Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, pp. 359-364.

MINOUX M. (1982), *Linear Dependence and Independence in Lattice Dioïds*, Note interne C.N.E.T. non publiée.

MINOUX M. (1997), Bideterminants, Arborescences and Extension of the Matrix-Tree Theorem to Semirings, *Discrete Mathematics,* 171, pp. 191-200.

MINOUX M. (1998), A Generalization of the All Minors Matrix Tree Theorem to Semirings. *Discrete Mathematics* (to appear).

MOLLER P. (1987), *Notions de rang dans les dioïdes vectoriels*, Actes de la Conférence "Algèbres exotiques et systèmes à événements discrets" C.N.E.T., 3-4 juin 1987.

OLSDER G.J., ROOS C. (1988), Cramer and Cayley-Hamilton in the Max-Algebra, *Linear Algebra and its Applications*, 101, pp. 87-108.

ORLIN J.B. (1978), Line Digraphs, Arborescences and Theorems of Tutte and Knuth, *Journal Combinatorial Theory*, B, 25, pp. 187-198.

PERTERSON J.L. (1981), *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice Hall, 290 pp.

REUTENAUER C., STRAUBING H. (1984), Inversion of Matrices over a Commutative Semiring, *J. of Algebra*, 88, n° 2, pp. 350-360.

ROBERT F., FERLAND J. (1968), Généralisation de l'algorithme de Warshall, *R.I.R.O.* 7, pp. 71-85.

ROTE G. (1990), Path Problems in Graphs, *Computing Suppl.* 7, pp. 155-189.

ROY B. (1975), Chemins et Circuits : Enumérations et Optimisation, in *Combinatorial Programming : Methods and Applications* D. Reidel, Boston, pp. 105-136.

RUTHERFORD D.E. (1964), The Cayley-Hamilton Theorem for Semirings, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sec.* A, 66, pp. 211-215.

SALOMAA A. (1969), *Theory of Automata,* Pergamon Press, Oxford.

SIMON I. (1994), On Semigroups of Matrices over the Tropical Semiring, *Informatique Théorique et Appl.* vol. 28, n° 3-4, pp. 277-294.

STRAUBING H. (1983), A Combinatorial proof of the Cayley-Hamilton Theorem, *Discrete Mathematics* 43, pp. 273-279.

TARJAN R.E. (1981), A Unified Approach to Path Problems, *J. A.C.M.*, vol 28, n° 3, pp. 577-593.

TUTTE W.T. (1948), The dissection of equilateral Triangles into equilateral Triangles, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 44, pp. 463-482.

WAGNEUR E. (1991), Moduloïds and Pseudomodules 1. Dimension Theory, *Discrete Mathematics* 98, pp. 57-73.

WARSHALL S. (1962), A Theorem on Boolean Matrices, *Journal A.C.M.* 9, p. 11.

WONGSEELASHOTE A. (1976), An Algebra for Determining all Path Values in a Network with Application to K-Shortest-Paths Problems, *Networks*, 6, pp. 307-334.

WONGSEELASHOTE A. (1979), Semirings and Path Spaces, *Discrete Mathematics* 26, pp. 55-78.

ZEILBERGER D. (1985), A Combinatorial Approach to Matrix Algebra, *Discrete Mathematics* 56, pp. 61-72.

ZIMMERMANN U. (1981), Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures, *Annals of Discrete Mathematics* 10.