ALGÈBRE LINÉAIRE DANS LES SEMI-ANNEAUX ET LES DIOÏDES

M. MINOUX
LIP 6, Université Paris 6

Résumé

On présente une vue d'ensemble des propriétés algébriques de base des semi-anneaux et des dioïdes, concernant en particulier : les extensions de la notion de dépendance et d'indépendance linéaires et leurs liens avec la notion de bidéterminant des matrices ; la caractérisation des éléments propres (valeurs propres et semi-modules propres) des matrices. Diverses applications des résultats généraux obtenus sont décrites : analyse de données et analyse de préférences ; théorie des systèmes à événements discrets.

Mots clés :
Semi-anneaux, dioïdes, dépendance et indépendance linéaires, bidéterminant, valeurs propres, vecteurs propres.

LINEAR ALGEBRA IN SEMI-RINGS AND DIOIDS

Abstract

We present an overview of basic algebraic properties of semi-rings and dioids, in particular those related to :

– extensions of the concept of linear dependence and independence and their connections with the so-called bideterminant ;
– the characterization of eigenvalues and eigen-semi-modules of matrices.

Various applications of the general results obtained are described : data analysis, preference analysis and algebraic approaches to some discrete event systems.

Keywords :
Semi-rings, dioids, linear dependence and independence, bideterminant, eigenvalues, eigenvectors.

PARTIE 1

DEPENDANCE ET INDEPENDANCE LINEAIRES

1. INTRODUCTION

Ce rapport est consacré à l'étude des problèmes de dépendance et d'indépendance linéaires dans les semi-modules (et les moduloïdes). La structure de semi-module (resp : de moduloïde) est celle qui intervient de façon naturelle dans les propriétés d'ensembles de vecteurs à coefficients dans un semi-anneau (resp : dans un dioïde) : les semi-modules sont vis-à-vis des semi-anneaux l'analogue de ce que sont les modules pour les anneaux.

Le § 2 introduit les principales notions de base, en particulier celles de morphismes de semi-modules, de familles génératrices, de dépendance et d'indépendance linéaires. Contrairement au cas des espaces vectoriels, plusieurs notions distinctes de dépendance et d'indépendance linéaires peuvent être considérées. En plus d'une notion de *base*, ceci nous conduit à proposer pour les semi-modules et les moduloïdes d'autres notions telles que : bases faible (ou W-bases), bases non redondantes (ou NR-bases).

Le § 3 est ensuite consacré à l'étude des liens entre le *bidéterminant d'une matrice* et les notions de dépendance et d'indépendance linéaires précédemment introduites. Plusieurs résultats classiques de l'algèbre linéaire dans les espaces vectoriels sont ici généralisés aux semi-modules et aux moduloïdes.

Le terme de ***dioïde*** a été initialement proposé par J. KUNTZMANN (1972) pour désigner la structure algébrique constituée par un ensemble E muni de deux lois de composition internes ⊕ et ⊗ telles que (E, ⊕) est un monoïde commutatif, (E, ⊗) est un monoïde (non nécessairement commutatif) avec une propriété de distributivité à droite et à gauche de ⊗ par rapport à ⊕. En l'absence de propriétés additionnelles des lois ⊕ et ⊗, une telle structure est assez pauvre et nous lui donnerons ici le nom de ***pré-semi-anneau***, réservant ainsi le nom de ***dioïde*** à des structures à deux lois munies de propriétés supplémentaires qui seront explicitées plus loin.

Définition

On appelle *pré-semi-anneau à droite* une structure algébrique (E, ⊕, ⊗) formée d'un ensemble de base E et de deux lois de composition internes avec les propriétés suivantes :

(i)	$a \oplus b = b \oplus a$	$\forall\, a, b \in E$	(commutativité de $\oplus$)
(ii)	$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$	$\forall\, a, b, c \in E$	(associativité de $\oplus$)
(iii)	$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$	$\forall\, a, b, c \in E$	(associativité de $\otimes$)
(iv)	$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$	$\forall\, a, b, c \in E$	
	(distributivité à droite de $\otimes$ relativement à $\oplus$)		

La notion de *pré-semi-anneau à gauche* est définie de façon analogue, en remplaçant la distributivité à droite par la distributivité à gauche :

(iv)' $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ $\quad \forall\, a, b, c \in E$.

Notons que dans les définitions ci-dessus, on ne suppose pas l'existence d'éléments neutres. S'ils n'existent pas (ni à droite, ni à gauche), on peut les ajouter sans problème. Dans le cas où ε, l'élément neutre ajouté à $\oplus$, est absorbant par $\otimes$, on a une structure de semi-anneau.

Définition

On appelle *pré-semi-anneau* une structure algébrique $(E, \oplus, \otimes)$ qui est à la fois un pré-semi-anneau à droite et un pré-semi-anneau à gauche.

Définition

La relation de pré-ordre induite par la loi $\oplus$ est définie par : $a \le b$, si et seulement si il existe c tel que $b = a \oplus c$. Lorsque cette relation est une relation d'ordre, on dit que l'ensemble $(E, \oplus)$ est *canoniquement ordonné* relativement à $\oplus$.

Définition

On appelle pré-dioïde à droite (resp : à gauche) un pré-semi-anneau à droite (resp : à gauche) canoniquement ordonné relativement à $\oplus$.

On appelle pré-dioïde un pré-semi-anneau canoniquement ordonné relativement à $\oplus$.

Définition (semi-anneau, semi-anneau à droite, à gauche)

Un *semi-anneau* est un pré-semi-anneau (E, ⊕, ⊗) qui vérifie les propriétés additionnelles suivantes :

(i) ⊕ admet un élément neutre ε

(ii) ⊗ admet un élément neutre e

(iii) ε est absorbant pour ⊗, c'est-à-dire :
$\forall\, a \in E : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$

Un semi-anneau à droite (resp : à gauche) est un pré-semi-anneau à droite (resp : à gauche) vérifiant les propriétés (i) à (iii) ci-dessus.
Un semi-anneau dans lequel l'opération ⊗ est commutative est dit *commutatif*.

Définition (anneau)

On appelle *Anneau* un semi-anneau dans lequel l'ensemble de base E a une structure de *groupe* commutatif pour l'addition ⊕. Un anneau (E, ⊕, ⊗) est dit *commutatif* si l'opération ⊗ est commutative.

Un cas particulier important de la structure d'anneau est évidemment la structure de ***corps*** dans laquelle l'ensemble de base E a une structure de groupe (non nécessairement commutatif) relativement à la loi ⊗. Lorsque ⊗ est commutative, on parle de corps commutatif.

Définition (dioïde, dioïde à droite, dioïde à gauche)

On appelle ***dioïde*** un ensemble (E, ⊕, ⊗) muni de deux lois de composition internes ⊕ et ⊗ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) (E, ⊕) est un monoïde commutatif avec élément neutre ε ;

(ii) (E, ⊗) est un monoïde avec élément neutre e ;

(iii) La relation de préordre canonique relativement à ⊕ (définie par $a \le b \Leftrightarrow \exists\, c : b = a \oplus c$) est une *relation d'ordre*, c'est-à-dire vérifie : $a \le b$ et $b \le a \Rightarrow a = b$

(iv) ε est absorbant pour ⊗, c'est-à-dire : $\forall\, a \in E : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$

(v) ⊗ est distributive à droite et à gauche, relativement à ⊕ ;

On appelle dioïde à droite (resp : à gauche) un ensemble $(E, \oplus, \otimes)$ vérifiant les propriétés (i) à (iv) ci-dessus et où $\otimes$ est seulement distributive à droite (resp : à gauche) relativement à $\oplus$.

La différence fondamentale entre un anneau et un dioïde réside dans la propriété (iii). ***Dans un anneau, l'addition induit une structure de groupe, tandis que dans un dioïde, elle induit une structure de monoïde canoniquement ordonné.*** Notons que cela implique ***une disjonction entre la classe des anneaux et la classe des dioïdes.***

Exemple

$\mathbb{Z}$ muni des opérations + et x usuelles, est un *anneau* mais *ce n'est pas un dioïde*.

En effet, dans cette structure, on a toujours, pour tout couple d'entiers relatifs a, b :
$a \leq b$ et $b \leq a$ pour la relation de préordre canonique ($a \leq b \Leftrightarrow \exists\ c : b = a + c$)

Ce n'est donc pas une relation d'ordre. Par contre, le semi-anneau $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels) est un dioïde car la relation de préordre canonique coïncide avec la relation d'ordre (total) habituelle. ||

C'est donc la présence d'une relation d'ordre intrinsèquement liée à la loi addition $\oplus$ qui constitue la principale distinction entre anneaux et dioïdes. Cette relation d'ordre conduira naturellement à définir des propriétés topologiques.

Définition (Dioïde idempotent)

On appelle *dioïde idempotent* un dioïde dans lequel l'addition $\oplus$ est commutative et idempotente.

Un cas particulier fréquemment rencontré est celui où l'addition $\oplus$ est non seulement idempotente, mais *sélective* (c.à.d. : $\forall\ a, b \in E : a \oplus b = a$ ou b).

Définition (Dioïde sélectif)

On appelle *dioïde sélectif* un dioïde dans lequel l'addition $\oplus$ est commutative et sélective.

Les dioïdes idempotents forment une classe particulièrement riche de dioïdes qui contient de nombreuses sous-classes, en particulier :

- les dioïdes double-idempotents et les treillis distributifs ;
- les dioïdes double sélectifs ;
- les dioïdes idempotents-groupes et les dioïdes sélectifs-groupes.

Définition

On appelle *dioïde idempotent-groupe* un dioïde (E, $\oplus$, $\otimes$) qui a une structure de monoïde commutatif idempotent pour $\oplus$ et une structure de groupe pour $\otimes$. (tout élément de E \ {ε} ayant un inverse pour $\otimes$).

Un cas particulier important pour les applications est celui où l'opération $\oplus$ est *sélective*.

Définition

On appelle *dioïde sélectif-groupe* un dioïde (E, $\oplus$, $\otimes$) qui a une structure de monoïde sélectif pour $\oplus$ et une structure de groupe pour $\otimes$. (tout élément de E \ {ε} ayant un inverse pour $\otimes$).

Exemple Dioïde "Min-Plus"

Prenons pour E l'ensemble des réels $\hat{\mathrm{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et définissons les opérations $\oplus$ et $\otimes$ par :

$\forall$ a, b $\in$ E : $a \oplus b = \mathrm{Min}\ \{a, b\}$

$\forall$ a, b $\in$ E : $a \otimes b = a + b$ (addition des réels)

(E, $\oplus$) est un monoïde sélectif avec, pour élément neutre, $\varepsilon = +\infty$, et (E, $\otimes$) un groupe avec élément neutre $e = 0$.

La structure (E, $\oplus$, $\otimes$) ci-dessus est donc un dioïde sélectif-groupe.

Notons que, dans la terminologie de la théorie des langages et des automates, des dioïdes sélectifs-groupes tels que Min-Plus ou Max-Plus correspondent à la notion de semi-anneau *Tropical* (cf. par ex. SIMON 1994). ||

2. SEMI-MODULES ET MODULOÏDES

La notion de *semi-module* généralise celle de module lorsque l'ensemble de référence est un semi-anneau au lieu d'un anneau.

2.1 DÉFINITIONS

Définition 2.1.1 (semi-module)

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un semi-anneau commutatif où ε et e désignent les éléments neutres de $\oplus$ et $\otimes$ respectivement. On appelle *semi-module* sur E un ensemble M muni d'une loi de composition interne $\square$ et d'une loi de composition externe $\perp$ satisfaisant les conditions suivantes :

(a) $(M, \square)$ est un monoïde commutatif dont l'élément neutre est noté 0 ;

(b) $\perp$ est une loi externe sur M qui, à tout $\lambda \in E$, $x \in M$ associe $\lambda \perp x \in M$ et vérifiant :

(b1) $\forall \lambda \in E, \forall (x, y) \in M^2$:

$$\lambda \perp (x \,\square\, y) = (\lambda \perp x) \,\square\, (\lambda \perp y)$$

(b2) $\forall (\lambda, \mu) \in E^2, \forall x \in M$:

$$(\lambda \oplus \mu) \perp x = (\lambda \perp x) \,\square\, (\mu \perp x)$$

(b3) $\forall (\lambda, \mu) \in E^2, \forall x \in M$

$$\lambda \perp (\mu \perp x) = (\lambda \otimes \mu) \perp x$$

(b4) $\forall x \in M$,

$$e \perp x = x$$
$$\varepsilon \perp x = 0$$

(b5) $\forall \lambda \in E \qquad \lambda \perp 0 = 0$

Lorsque l'ensemble de base $(E, \oplus, \otimes)$ est un semi-anneau *non commutatif*, il faut distinguer la notion de *semi-module à gauche* (où l'opération $\perp$ représente la multiplication à gauche d'un vecteur par un scalaire) et la notion de *semi-module à droite* (où l'opération $\perp$ représente la multiplication à droite d'un vecteur par un scalaire). Lorsque $\otimes$ est commutative, les notions de semi-module à gauche et de semi-module à droite coïncident.

La définition suivante correspond à la généralisation de la notion de module lorsque l'ensemble de référence est un dioïde au lieu d'un anneau.

Définition 2.1.2 **(moduloïde)**
Lorsque $(E, \oplus, \otimes)$ est un *dioïde*, un semi-module sur E est appelé un *moduloïde*.

Exemple 2.1.3
$(E, \oplus, \otimes)$ étant un semi-anneau, considérons E^n l'ensemble des n-vecteurs à composantes sur E muni des opérations $\square$ et $\perp$ définies par :

$x = (x_i)_{i = 1, \ldots, n}$ $\quad y = (y_i)_{i = 1, \ldots, n}$

$x \square y = z = (z_i)_{i = 1.. n}$ $\quad$ où $\forall i : z_i = x_i \oplus y_i$

$\lambda \in E$ $\quad \lambda \perp x = u = (u_i)_{i = 1.. n}$

où, $\forall$ i : $\quad u_i = \lambda \otimes x_i$.

On vérifie aisément que l'ensemble $(E^n, \square, \perp)$ ainsi défini est un semi-module. Conformément à l'usage courant systématiquement adopté pour les modules sur $\mathbb{Z}$ et les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, la loi $\square$ (addition des vecteurs) introduite ci-dessus, sera notée $\oplus$ et la loi externe $\perp$ (multiplication à gauche d'un vecteur par un scalaire) sera notée $\otimes$.
Notons aussi que, par référence à cet exemple classique, les éléments d'un semi-module M sont appelés des *vecteurs* ||

Exemple 2.1.4
Soit $(M, \oplus)$ un monoïde commutatif, d'élément neutre ε, et considérons le dioïde $(\mathbb{N}, +, x)$.
Définissons la loi externe $\perp$ opérant sur les éléments de $\mathbb{N}$ par :
$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in M \quad n \perp x = x \oplus x \oplus \ldots \oplus x$ (n fois) en convenant que $0 \perp x = \varepsilon$.
On vérifie aisément que $(M, \oplus, \perp)$ est un semi-module sur $(\mathbb{N}, +, \times)$. C'est donc un *moduloïde*. ||

Exemple 2.1.5
Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un semi-anneau commutatif, et $A \in M_n(E)$ une matrice carrée n x n à coefficients dans E. Soient $\lambda \in E$ et $V \in E^n$ tels que :

$$A \otimes V = \lambda \otimes V$$

(on dit que V est vecteur propre de A pour la valeur propre λ).
L'ensemble $\mathcal{V}_\lambda$ de tous les vecteurs propres de A pour la valeur propre $\lambda \in E$ est un *semi-module*. En effet, $\forall V \in \mathcal{V}_\lambda, W \in \mathcal{V}_\lambda, (\alpha, \beta) \in E^2$:

$$\begin{aligned} A \otimes (\alpha \otimes V \oplus \beta \otimes W) &= (\alpha \otimes \lambda) \otimes V \oplus (\beta \otimes \lambda) \otimes W \\ &= \lambda \otimes (\alpha \otimes V \oplus \beta \otimes W) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\alpha \otimes V \oplus \beta \otimes W \in \mathcal{V}_\lambda$. ||

2.2 MORPHISMES DE SEMI-MODULES OU DE MODULOÏDES. ENDOMORPHISMES

Définition 2.2.1

Soient U et V deux semi-modules sur le même semi-anneau (E, ⊕, ⊗). Les lois internes sont notées $\Box$ et $\Box'$ respectivement et les lois externes $\perp$ et $\perp'$ respectivement. On appelle *morphisme de semi-modules* de U dans V toute application $\varphi : U \to V$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\forall\ (x, y) \in U^2$ $\qquad \varphi(x \,\Box\, y) = \varphi(x) \,\Box'\, \varphi(y)$

(ii) $\forall\ (\lambda, x) \in E \times U :$ $\qquad \varphi(\lambda \perp x) = \lambda \perp' \varphi(x)$

Un morphisme de semi-modules de U dans lui-même est appelé un *endomorphisme* (de semi-module).

Lorsque l'ensemble de référence est un *dioïde* on parlera de morphismes ou d'endomorphismes de *moduloïdes*.

Conformément à l'usage, les morphismes de semi-modules pourront également être appelés des *applications linéaires*.

2.3 SOUS-SEMI-MODULE. SEMI-MODULE QUOTIENT

***Définition 2.3.1* (sous-semi-module)**

Soit $(M, \Box, \perp)$ un semi-module sur un semi-anneau (E, ⊕, ⊗). On appelle sous-semi-module de M toute partie $M' \subset M$ stable pour les lois induites par $\Box$ et $\perp$.

***Définition 2.3.2* (semi-module quotient)**

Soit $(M, \Box, \perp)$ un E-semi-module $(M', \Box, \perp)$ un sous-semi-module de M et M/M' l'ensemble quotient de M par la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ définie par :

$$x \,\mathfrak{R}\, y \Leftrightarrow \quad \exists\,(u, v) \in M'^2 \text{ t.q :}$$
$$x \,\Box\, u = y \,\Box\, v$$

est appelé *semi-module quotient de M par M'*.

On vérifie aisément que la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ est compatible avec les lois $\Box$ et $\perp$ de M. En effet :

$x_1 \ \Re \ y_1 \Leftrightarrow \quad x_1 \ \Box \ u_1 = y_1 \ \Box \ v_1$ avec $u_1 \in M', \ v_1 \in M'$
$x_2 \ \Re \ y_2 \Leftrightarrow \quad x_2 \ \Box \ u_2 = y_2 \ \Box \ v_2$ avec $u_2 \in M', \ v_2 \in M'$
d'où l'on déduit que $(x_1 \ \Box \ x_2) \ \Re \ (y_1 \ \Box \ y_2)$ puisque $u_1 \ \Box \ u_2 \in M'$ et $v_1 \ \Box \ v_2 \in M'$.

D'autre part, pour $\lambda \in E$,
$x \ \Re \ y \Leftrightarrow \quad x \ \Box \ u = y \ \Box \ v$ avec $u \in M', \ v \in M'$
d'où l'on déduit :

$$(\lambda \perp x) \ \Box \ (\lambda \perp u) = (\lambda \perp y) \ \Box \ (\lambda \perp v)$$

ce qui montre que $(\lambda \perp x) \ \Re \ (\lambda \perp y)$ puisque $\lambda \perp u \in M'$ et $\lambda \perp v \in M'$
Il découle de ce qui précède que la *surjection canonique* φ (qui à tout élément x de M associe sa classe d'équivalence dans M/M') *est un morphisme de semi-modules* (ou : application linéaire).

2.4 SOUS-SEMI-MODULE ENGENDRÉ. FAMILLE GÉNÉRATRICE D'UN (SOUS-)SEMI-MODULE

Définition 2.4.1 **(sous-semi-module engendré par une famille d'éléments)**

Soit $(M, \ \Box, \perp)$ un semi-module sur E et $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille non vide quelconque (finie ou infinie) d'éléments de M. On appelle *sous-semi-module engendré par X*, noté Sp (X), le plus petit sous-semi-module de M contenant X. Si Sp (X) = M on dit que X est une *famille génératrice* (ou : ensemble générateur) de M.

On démontre aisément la :

Proposition 2.4.2

Soit $(M, \ \Box, \perp)$ un semi-module sur E et $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille non vide quelconque (finie ou infinie) d'éléments de M.

Alors Sp (X) est l'ensemble Y de tous les éléments $y \in M$ de la forme :

$$y = \sum_{j \in J} \lambda_j \perp x_j \qquad (1)$$

(sommation au sens de $\Box$) où $J \subset I$ est un sous-ensemble d'indices de cardinal fini et, $\forall \ j \in J, \ \lambda_j \in E$.

Démonstration

Clairement Y, l'ensemble des y obtenus par (1), est un semi-module, les axiomes (a) et (b1) — (b5) étant aisément vérifiés. Cet ensemble contient X (pour obtenir x_i il suffit de prendre J = {i} et $\lambda_i = e$) et 0 l'élément neutre de M (il suffit pour cela de prendre $i \in I$ quelconque et J = {i} $\lambda_i = \varepsilon$). Y est donc un sous-semi-module de M contenant X et par suite $\quad Sp\ (X) \subset Y$.

Par ailleurs, on remarque que tout sous-semi-module de M contenant $X = (x_i)_{i\in\ I}$ contient toutes les combinaisons linéaires des x_i. Donc

$$Y \subset \quad Sp\ (X)$$

On en déduit que Y = Sp (X) et Y est le plus petit sous-semi-module de M contenant X. □

2.5 NOTIONS DE DÉPENDANCE ET D'INDÉPENDANCE LINÉAIRES DANS LES SEMI-MODULES

Dans les semi-modules, les notions de dépendance et d'indépendance linéaires peuvent être définies de différentes façons.

Considérons une famille non vide quelconque (finie ou infinie) $X = (x_i)_{i\ \in\ I}$ d'éléments dans un semi-module (M, $\square$, $\perp$).

Pour tout sous-ensemble d'indices $J \subset I$ on notera X_J la sous-famille de X restreinte aux éléments x_j, $j \in J$, et Sp (X_J) le sous-semi-module engendré par X_J.

Définition 2.5.1

(I) On dit que la famille $X = (x_i)_{i\ \in\ I}$ est *indépendante* si et seulement si :

$\forall I_1 \subset I, \forall I_2 \subset I, I_1 \cap I_2 = \emptyset$

$$Sp\ (X_{I_1}) \cap Sp\ (X_{I_2}) = \{0\} \qquad (2)$$

(WI) On dit que la famille X est *W-indépendante* (indépendante au sens faible) si et seulement si :

$\forall i \in I, \forall I_2 \subset I, i \notin I_2$:

$$Sp\ (X_{\{i\}}) \cap Sp\ (X_{I_2}) = \{0\} \qquad (3)$$

(NR) On dit que la famille X est *NR-indépendante* ou *non-redondante* si et seulement si :

$\forall i \in I, \forall I_2 \subset I, i \notin I_2$:

$$\{x_i\} \cap Sp\ (X_{I_2}) = \emptyset \qquad (4)$$

Proposition 2.5.2

Soit $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille indépendante (resp : W-indépendante, NR-indépendante) d'éléments d'un semi-module $(M, \square, \perp)$

Alors toute sous-famille $(x_i)_{i \in J}$ $J \subset I$ est indépendante (resp : W-indépendante, NR-indépendante).

Démonstration

Elle découle directement des définitions précédentes. $\square$

Dans les espaces vectoriels, les différentes notions d'indépendance introduites dans la définition 2.5.1 ci-dessus sont équivalentes. Ceci n'est plus vrai, en général, dans les semi-modules, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 2.5.3

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ le dioïde $(\mathbb{N}, \text{Max}, \times)$ avec $\varepsilon = 0$, $e = 1$, et $M = E^2$, l'ensemble des vecteurs à deux composantes sur E.

Pour $\lambda > 1$ entier, définissons :

$x_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$

et $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Clairement $x_1 \notin \text{Sp}(\{x_2, x_3\})$

$x_2 \notin \text{Sp}(\{x_1, x_3\})$

$x_3 \notin \text{Sp}(\{x_1, x_2\})$

Par suite la famille $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ est NR-indépendante. Par contre elle n'est pas W-*indépendante* car, $\lambda \otimes x_3 \in \text{Sp}(\{x_1, x_2\})$. ||

Exemple 2.5.4

Soit $M = E^4$, l'ensemble des vecteurs à 4 composantes sur $(\mathbb{R}^+, \text{Max}, \times)$ et considérons $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ où :

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut vérifier que cette famille est W-indépendante mais elle n'est pas *indépendante* puisque :

$$x_1 \oplus x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 \oplus x_3 \qquad \|$$

La notion d'indépendance dans les semi-modules définie par (2) a été introduite et étudiée par GONDRAN & MINOUX (1977, 1978, 1984). L'indépendance au sens faible définie par (3) a été étudiée par WAGNEUR (1991) et la NR-indépendance (non redondance) définie par (4) a été introduite et étudiée par CUNINGHAME-GREEN (1979) puis par COHEN et al. (1985), MOLLER (1987) et WAGNEUR (1991).

La proposition suivante montre que, pour une famille X à éléments dans un semi-module, la propriété d'indépendance est plus forte que celle de W-indépendance, qui est elle-même plus forte que celle de NR-indépendance.

Proposition 2.5.5

(i) Pour une famille $X = (x_i)_{i \in I}$ d'éléments dans un semi-module, l'indépendance implique la W-indépendance, laquelle implique la NR-indépendance.

(ii) Lorsque $(E \backslash \{\varepsilon\}, \otimes)$ a une structure de *groupe*, alors les notions de W-indépendance et de NR-indépendance sont équivalentes.

Démonstration

La première partie de la proposition découle directement des définitions des différentes notions d'indépendance. Pour la seconde partie de la proposition, il suffit donc de montrer que si $(E \backslash \{\varepsilon\}, \otimes)$ est un groupe, la NR-indépendance implique la W-indépendance.

La preuve est par contradiction. Supposons que la famille $X = (x_i)_{i \in I}$ soit NR-indépendante mais pas W-indépendante. Alors cela signifie qu'il existe $i \in I$ et $I_2 \subset I$ $(i \notin I_2)$ tels que :

$$\lambda \perp x_i = \sum_{j \in I_2} \mu_j \perp x_j$$

(sommation au sens de □) avec $\lambda \in E$, $\lambda \neq \varepsilon$, $\mu_j \in E$ $\qquad (\forall\, j \in I_2)$.

En notant alors λ^{-1} l'inverse de λ pour $\otimes$ on obtient :

$$x_i = \sum_{j \in I_2} (\lambda^{-1} \otimes \mu_j) \perp x_j$$

ce qui contredit le fait que X est NR-indépendante. Ceci établit (ii). □

Définition 2.5.6

(i) On appelle *base* d'un semi-module (M, □, $\perp$) une famille génératrice indépendante.

(ii) On appelle *W-base* (base faible) de M une famille génératrice W-indépendante.

(iii) On appelle *NR-base* de M une famille génératrice NR-indépendante (ou : non redondante).

Remarquons que, de par la proposition 2.5.5 (i) toute base d'un semi-module est aussi une W-base, et toute W-base est aussi une NR-base.

Dans les paragraphes suivants, nous utiliserons essentiellement la notion de base correspondant à la définition 2.5.6 (i).

Montrons tout d'abord que, sous certaines conditions, si un semi-module (M, □, $\perp$) a une base (resp. un W-base, une NR-base), celle-ci est unique.
Pour cela introduisons tout d'abord la notion de *réductibilité*.

Définition 2.5.7

Soit (M, □, $\perp$) un semi-module sur (E, $\oplus$, $\otimes$).
Etant donné un ensemble de vecteurs $V = (V_k)$, $k \in K$, avec $V_k \in M$ ($\forall$ k),
on dit qu'un vecteur $x \in M$ est *réductible* sur sp (V) si et seulement si il existe $y \neq x$ et $z \neq x$, $y \in$ sp (V), $z \in$ sp (V) tels que: $x = y$ □ z.
Dans le cas contraire, x sera dit *irréductible.*

Remarque : x réductible sur sp (V) $\Rightarrow x \in$ sp (V) ||

Comme conséquence immédiate de cette définition, on a la propriété suivante.

Propriété 2.5.8

Si x est irréductible sur sp (V) alors une (et une seulement) des deux conditions suivantes est satisfaite :

(i) $x \notin$ sp (V)

(ii) $x = y \ \square\ z$ avec $y \in$ sp (V) et $z \in$ sp (V)
$\Rightarrow$ $y = x$ ou $z = x$

Proposition 2.5.9

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde. ε et e désignant les éléments neutres pour $\oplus$ et $\otimes$ respectivement, on suppose que $a \oplus b = e \Rightarrow a = e$ ou $b = e$

Soit $(M, \square, \perp)$ un moduloïde sur E canoniquement ordonné par $\square$. On note $\propto$ la relation d'ordre canonique sur M.

On suppose de plus que pour $u \in M$, $v \in M$, $\lambda \in E$ avec $v \neq u$ et $v \neq 0$

$v = \lambda \perp v \ \square\ u \quad \Rightarrow \quad \lambda = e$

Soit $X = (x_i)_{i \in I}$ une famille NR-indépendante d'éléments de M.

Alors $\forall\, j \in I$, x_j est irréductible sur sp (X).

Démonstration

Supposons que $x_j = y \ \square\ z$ avec $y \in$ sp (X) et $z \in$ sp (X). Noter que ceci implique $y \propto x_j$ et $z \propto x_j$.

$y \in$ sp (X) $\Rightarrow$

$\exists\, \lambda_i \in E, \exists\, I_1 \subset I : \quad y = \sum_{i \in I_1} \lambda_i \perp x_i$ (sommation au sens de $\square$).

De même

$z \in$ sp (X) $\Rightarrow$

$\exists\, \mu_i \in E,$

$\exists\, I_2 \subset I : \qquad z = \sum_{i \in I_2} \lambda_i \perp x_i$

En convenant de poser $\lambda_i = \varepsilon$ pour $i \in I_2 \backslash I_1$ et $\mu_i = \varepsilon$ pour $i \in I_1 \backslash I_2$ on a donc :

$$x_j = \sum_{i \in I_1 \cup I_2} (\lambda_i \oplus \mu_i) \perp x_i$$

$$= (\lambda_j \oplus \mu_j) \perp x_j \ \square \sum_{\substack{i \in I_1 \cup I_2 \\ i \neq j}} (\lambda_i \oplus \mu_i) \perp x_i$$

En posant $\lambda = \lambda_j \oplus \mu_j$

et $u = \sum_{\substack{i \in I_1 \cup I_2 \\ i \neq j}} (\lambda_i \oplus \mu_i) \perp x_i \ \in$ sp $(X \setminus \{x_j\})$

on obtient :

$x_j \quad = \lambda \perp x_j \; \square \; u$ (5)

avec $u \in$ sp $(X \setminus \{x_j\})$.

Du fait de la NR-indépendance, on doit avoir $x_j \neq 0$ et $x_j \neq u$, d'où il découle $\lambda \neq \varepsilon$. Les hypothèses de la proposition 2.5.9 impliquent alors $\lambda = e$.

Comme $\lambda = \lambda_j \oplus \mu_j$, on doit avoir soit $\lambda_j = e$, soit $\mu_j = e$.

Supposons par exemple $\lambda_j = e$.

Alors y se réécrit :

$$y \;= x_j \; \square \sum_{i \in I_1 \setminus \{j\}} \lambda_i \perp x_i$$

d'où l'on peut déduire : $x_j \propto y$ et, du fait que $\propto$ est une relation d'ordre, ceci implique $y = x_j$.

Dans le cas où $\mu_j = e$ on déduirait de façon analogue que $z = x_j$.

On en déduit l'irréductibilité de x_j $\square$.

Remarque 2.5.10

L'hypothèse :

$$\left.\begin{array}{l} v = \lambda \perp v \; \square \; u \\ v \neq u \quad v \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = e$$

est vérifiée dans de nombreux moduloïdes, en particulier ceux associés aux dioïdes sélectifs-groupes ou sélectifs quasi-groupes.

Par exemple, considérons un moduloïde dont les éléments sont des vecteurs à n composantes sur $(E, \oplus, \otimes)$ avec les lois habituelles.

$$(x_i)_{i=1\ldots n} \; \square \; (y_i)_{i=1\ldots n} = (x_i \oplus y_i)_{i=1\ldots n}$$

$$\lambda \perp (x_i)_{i=1\ldots n} = (\lambda \otimes x_i)_{i=1\ldots n}$$

$$0 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

Alors la relation $v = \lambda \perp v \; \square \, u$ implique qu'il existe i tel que $v_i \neq u_i$ avec $v_i = \lambda \otimes v_i \oplus u_i$.

Nécessairement dans ce cas $v_i \neq \varepsilon$

Si $\oplus$ est sélective, alors on a $v_i = \lambda \otimes v_i$ avec $v_i \neq \varepsilon$

Par suite, si $(E, \otimes)$ est un groupe ou un quasi-groupe, on peut simplifier par $v_i \neq \varepsilon$, ce qui entraîne $\lambda = e$ $\|$

Corollaire 2.5.11

Sous les hypothèses de la Proposition 2.5.9., si $X = (x_i)_{i\in I}$ est une famille W-indépendante (resp. indépendante) d'éléments de M, alors $\forall\, j \in I$, x_j est irréductible sur sp (X).

Démonstration

Elle découle du fait que :

X W-indépendante $\Rightarrow$ X NR-indépendante

et

X indépendante $\Rightarrow$ X est W-indépendante. □

Proposition 2.5.11

On suppose vérifiées les hypothèses de la proposition 2.5.9 et de plus que :

$a \in E, b \in E \quad a \otimes b = e \Rightarrow a = e$ et $b = e$

Alors : (i) si (M, □, $\perp$) a une NR-base, elle est unique.

(ii) si (M, □, $\perp$) a une W-base, elle est unique.

(iii) si (M, □, $\perp$) a une base, elle est unique.

Démonstration

Démontrons (i) en utilisant la propriété d'irréductibilité des éléments d'une NR-base.

Soient $X = \left(x_i\right)_{i \in I}$ et $Y = \left(y_j\right)_{j \in J}$ deux NR-bases de M.

$\forall\, x_i \in X$ on a :

$$x_i = \sum_{j\in J} \mu_j^i \perp y_j$$

Mais sp (X) = sp (Y) = M.

La NR-indépendance de X implique que x_i est irréductible sur sp (X), donc irréductible sur sp (Y). Par suite : il existe $j \in J$ tel que :

$x_i = \mu_j^i \perp y_j$ pour $\mu_j^i \in E$ et $y_j \in Y$.

De la même façon, on démontre que $y_j = \theta_k^j \perp x_k$ pour $\theta_k^j \in E$ et $x_k \in X$.

D'où $x_i = \mu_j^i \otimes \theta_k^j \perp x_k$

et comme X est NR-indépendant, nécessairement $i = k$ et $\mu_j^i \otimes \theta_k^j = e$.

On en déduit $\mu_j^i = e$ *et* $\theta_k^j = e$, ce qui montre que : $x_i = y_j$.

Ainsi, pour tout $x_i \in X$, on peut trouver $y_j \in Y$ tel que $x_i = y_j$. On déduit X = Y, ce qui démontre l'unicité. (ii) et (iii) découlent alors du fait que toute base est une W-base et toute W-base est une NR-base. □

3. BIDÉTERMINANT ET INDÉPENDANCE LINÉAIRE

On étudie dans ce paragraphe les liens entre dépendance et indépendance linéaires, et la notion de *bidéterminant* pour des matrices carrées à éléments dans un semi-anneau ou un dioïde. On retrouve ainsi, dans un cadre beaucoup plus général, des résultats d'algèbre linéaire classique.

Il est intéressant de remarquer que, du fait que $(E, \oplus)$ n'est pas un groupe, les démonstrations sont très différentes de celles que l'on connaît en algèbre classique et font généralement appel à des propriétés combinatoires et à la théorie des graphes. En particulier, le graphe $G(A)$ associé à une matrice $A \in M_n(E)$ jouera un rôle essentiel.

3.1 BIDÉTERMINANT ET BI-APPLICATIONS LINÉAIRES ALTERNÉES

Etant donnée une matrice $A \in M_n(E)$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}}$, et σ une permutation de $\{1,..., n\}$, on appelle *poids* de σ, noté $w(\sigma)$, l'élément de E défini par :

$w(\sigma) = a_{1,\sigma(1)} \otimes a_{2,\sigma(2)} \otimes ... \otimes a_{n,\sigma(n)}$

On rappelle que le *bidéterminant de A* est le couple

$\Delta(A) = \begin{pmatrix} \det^+(A) \\ \det^-(A) \end{pmatrix}$ où :

$$\det^+(A) = \sum_{\sigma \in Per^+(n)}^{\oplus} w(\sigma)$$

$$\det^-(A) = \sum_{\sigma \in Per^-(n)}^{\oplus} w(\sigma)$$

$Per^+(n)$ (resp : $Per^-(n)$) dénotant l'ensemble des permutations de $\{1,..., n\}$ de signature +1 (resp : de signature -1). Comme $\mathrm{sign}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sign}(\sigma)$, on remarque que A et A^T (la matrice transposée de A) ont même bidéterminant : $\Delta(A^T) = \Delta(A)$

Le *permanent* de A est défini par :

$$\mathrm{Perm}(A) = \det^+(A) \oplus \det^-(A) = \sum_{\sigma \in Per(n)}^{\oplus} w(\sigma)$$

Contrairement au cas de l'algèbre linéaire usuelle, le permanent d'une matrice dans un semi-anneau ou un dioïde peut être facile à calculer et avoir des interprétations combinatoires intéressantes, comme le montrent les exemples suivants :

Exemple 3.1.1

$E = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\oplus = \min$, $\otimes = +$.

Le permanent d'une matrice $A \in M_n(E)$ correspond à la valeur de l'affectation de coût minimum. ‖

Exemple 3.1.2

$E = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\oplus = \min$, $\otimes = \max$.

Le permanent d'une matrice $A \in M_n(E)$ correspond à la valeur de l'affectation "bottleneck". ‖

On remarque que si on multiplie une colonne (une ligne) j par $\lambda_j \in E$ ($\lambda_j \neq \varepsilon$), le permanent est alors multiplié par λ_j.

***Définition 3.1.3* (Bi-application linéaire alternée)**

Etant donnés $x^1, x^2, \ldots x^n$ n vecteurs de E^n, une application $E^{n^2} \xrightarrow{f} E^2$ est une *bi-application linéaire alternée* si et seulement si la bi-application

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \begin{pmatrix} f_1\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \\ f_2\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \end{pmatrix}$$

est telle que :

- f_1 et f_2 sont des applications linéaires : $E^{n^2} \to E$
- $f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^j, \ldots, x^n) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ entraîne

  $f(x^1, \ldots, x^j, \ldots, x^i, \ldots, x^n) = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.1.4

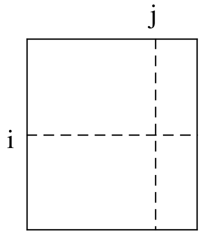
Le bidéterminant $\Delta(A) = \begin{pmatrix} \det^+(A) \\ \det^-(A) \end{pmatrix}$ est une bi-application linéaire alternée.

Démonstration

Evident en remarquant qu'une transposition change le signe d'une permutation. □

Comme pour le déterminant en algèbre linéaire usuelle, on peut établir une formule de *développement du bidéterminant par rapport à une ligne ou à une colonne* de la matrice.

Pour une matrice $A \in M_n(E)$ notons $\overline{A}_i^j$ la matrice n x n obtenue (à partir de A) en remplaçant tous les termes de la i^e ligne et de la j^e colonne par ε (élément neutre de $\oplus$) sauf le terme a_{ij} qui est remplacé par e (élément neutre de $\otimes$)

A = 

$$\overline{A}_i^j = \begin{array}{c|cccc} & & & j & \\ \hline i & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{array} \quad \text{with column } j = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ e \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

Du fait de la linéarité des applications $\det^+(A)$ et $\det^-(A)$, on peut alors écrire (développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne) :

$$\det^+(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes \det^+(\overline{A}_i^j)$$

$$\det^-(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes \det^-(\overline{A}_i^j)$$

ou encore, en notation vectorielle :

$$\Delta(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes \Delta(\overline{A}_i^j)$$

On obtiendrait évidemment une formule analogue en développant par rapport à une colonne.

On déduit aisément de ce qui précède la :

Propriété 3.1.5

Si la matrice $A \in M_n(E)$ a une colonne (ou une ligne) dont tous les termes sont égaux à ε (élément neutre de $\oplus$) alors $\det^+(A) = \det^-(A) = \varepsilon$

Démonstration

Effectuer le développement du bidéterminant par rapport à la colonne (par rapport à la ligne) et utiliser le fait que ε est absorbant pour $\otimes$. $\square$

La réciproque de la propriété 3.1.5, est fausse comme on peut s'en convaincre dans l'exemple suivant :

$A \in M_4(S)$ $(n = 4)$

	1	2	3	4
1	x	ε	ε	ε
2	x	ε	ε	ε
3	ε	x	ε	ε
4	ε	ε	x	x

Seuls les termes marqués d'une croix sont différents de ε. On a bien :

$\Delta_1(A) = \Delta_2(A) = \varepsilon$, mais il existe un terme différent de ε dans chaque ligne et chaque colonne.

3.2 BIDÉTERMINANT DE MATRICES À COLONNES (LIGNES) LINÉAIREMENT DÉPENDANTES. RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Nous étudions dans ce paragraphe des généralisations de la propriété bien connue en algèbre linéaire usuelle, à savoir que si une matrice a ses colonnes linéairement dépendantes, alors son déterminant est nul. Pour les différentes notions d'indépendance introduites dans le § 2.5, nous retrouverons l'analogue de cette propriété, qui se traduit ici par l'égalité des deux termes du bidéterminant.

Commençons par la propriété élémentaire suivante :

Propriété 3.2.1

Si la matrice $A \in M_n(E)$ a deux colonnes (ou deux lignes) identiques alors :

$\det^+(A) = \det^-(A)$

Démonstration

Pour $j = 1 \ldots n$, notons A^j la $j^{\text{ème}}$ colonne de A et supposons par exemple que $A^i = A^j$ avec $i \neq j$. Du fait que le bidéterminant $\Delta(A)$ est une bi-application linéaire alternée on a :

$$\Delta\,(A^1, A^2, \ldots A^i, \ldots A^j, \ldots A^n) = \begin{pmatrix} \det^+(A) \\ \det^-(A) \end{pmatrix}$$

et :

$$\Delta\,(A^1, A^2, \ldots A^j, \ldots A^i, \ldots A^n) = \begin{pmatrix} \det^-(A) \\ \det^+(A) \end{pmatrix}$$

Comme $A^i = A^j$, ceci entraîne bien :

$\det^+(A) = \det^-(A)$. □

Proposition 3.2.2

Soit $A \in M_n(E)$ et supposons que les colonnes de A soient NR-dépendantes.

Alors $\det^+(A) = \det^-(A)$.

Démonstration

Puisque les colonnes de A $A^1, A^2, \ldots A^n$ sont NR-dépendantes, cela signifie qu'il existe une colonne, par exemple A^1 qui est combinaison linéaire des autres. On a donc :

$$A^1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \otimes A^j$$

avec $\lambda_j \in E$ ($j = 2 \ldots n$)

En utilisant la linéarité du bidéterminant :

$$\Delta(A) = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \otimes \Delta(A^j, A^2, A^3, \ldots A^j, \ldots A^n)$$

Comme, pour tout j = 2, ... n on a (propriété 3.2.1) :
$det^+ (A^j, A^2, \ldots A^n) = det^- (A^j, A^2, \ldots A^n)$ on en déduit : $det^+ (A) = det^- (A)$. □

Proposition 3.2.3

Soit $A \in M_n(E)$ et supposons que les colonnes (les lignes) de A soient W-dépendantes.
Alors :

(i) il existe $\alpha \in E$, $\alpha \neq \varepsilon$, tel que :
$\alpha \otimes det^+ (A) = \alpha \otimes det^- (A)$.

(ii) Si $(E, \oplus, \otimes)$ est tel que tous les éléments de $E\backslash\{\varepsilon\}$ sont réguliers pour $\otimes$ alors $det^+ (A) = det^- (A)$

Démonstration

La W-dépendance des colonnes $A^1, \ldots A^n$ implique l'existence d'une colonne de A, par exemple A^1, et d'un sous-ensemble d'indices $J \subset \{2, \ldots n\}$ tels que :

$$Sp(A^1) \cap Sp(A^J)$$

contient un vecteur différent de $0 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

Ce vecteur est nécessairement de la forme $\alpha \otimes A^1$ avec $\alpha \in E\backslash\{\varepsilon\}$ et il existe $\lambda_j \in E$ $(j \in J)$ tels que :

$$\alpha \otimes A^1 = \sum_{j \in J} \lambda_j \otimes A^j$$

La matrice $A' = (\alpha \otimes A^1, A^2, \ldots A^n)$ a donc ses colonnes NR-dépendantes, donc, d'après la Proposition 3.2.2, on a : $det^+ (A') = det^-(A')$.

D'où : $\alpha \otimes det^+ (A) = \alpha \otimes det^- (A)$

ce qui démontre (i). (ii) en écoule alors immédiatement. □

Etudions maintenant le cas où les colonnes de la matrice A sont linéairement dépendantes au sens de la définition 2.5.1. (I).

Nous établirons tout d'abord un premier résultat moyennant des hypothèses assez restrictives (régularité des éléments de E pour $\oplus$ et $\otimes$) pour obtenir l'égalité des deux termes du bidéterminant. Nous étudierons ensuite d'autres types d'hypothèses moins restrictives.

Proposition 3.2.4

Supposons que $(E, \oplus, \otimes)$ est tel que tous les éléments de E sont réguliers pour $\oplus$ et tous les éléments de $E\backslash\{\varepsilon\}$ sont réguliers pour $\otimes$

Alors, si les colonnes de $A \in M_n(E)$ sont linéairement dépendantes, on a :

$$\det{}^{+}(A) = \det{}^{-}(A).$$

Démonstration

Comme les colonnes de A sont linéairement dépendantes, il existe $I_1 \subset \{1, \ldots n\}$ et $I_2 \subset \{1, \ldots n\}$ $I_1 \neq \emptyset$, $I_2 \neq \emptyset$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ tels que :

$$\sum_{j \in I_1} \lambda_j \otimes A^j = \sum_{j \in I_2} \lambda_j \otimes A^j$$

avec $\lambda_j \in E\backslash\{\varepsilon\}$ pour $j \in I_1 \cup I_2$

Il n'est pas restrictif de supposer que $1 \in J_1$. Soit A' la matrice déduite de A en remplaçant la colonne A^1 par $\sum_{j \in I_1} \lambda_j \otimes A^j$.

La matrice A' est telle que sa première colonne est combinaison linéaire d'autres colonnes, A^j pour $j \in I_2$. D'après la Proposition 3.2.2, on a donc :

$$\det{}^{+}(A') = \det{}^{-}(A')$$

Par ailleurs, en utilisant la linéarité du bidéterminant, on peut écrire :

$$\det{}^{+}(A') = \lambda_1 \otimes \det{}^{+}(A) \quad \oplus \quad \sum_{j \in I_1 \backslash \{1\}} \lambda_j \otimes \det{}^{+}(A^j, A^2, \ldots A^j, \ldots A^n)$$

et :

$$\det{}^{-}(A') = \lambda_1 \otimes \det{}^{-}(A) \quad \oplus \quad \sum_{j \in I_1 \backslash \{1\}} \lambda_j \otimes \det{}^{-}(A^j, A^2, \ldots A^j, \ldots A^n)$$

Comme, $\forall\, j \in J_1\backslash\{1\}$, $\det^{+}(A^j, A^2, \ldots A^j, \ldots A^n) = \det^{-}(A^j, A^2, \ldots A^j, \ldots A^n)$ (cf Propriété 3.2.1) et que tout élément est régulier pour $\oplus$, on en déduit que :

$\lambda_1 \otimes \det^{+}(A) = \lambda_1 \otimes \det^{-}(A)$

Comme $\lambda_1 \neq \varepsilon$ est régulier pour $\otimes$, ceci implique : $\det^{+}(A) = \det^{-}(A)$. □

Il existe cependant de nombreux exemples de semi-anneaux et de dioïdes pour lesquels les hypothèses de la Proposition 3.2.4 ne sont pas satisfaites. Nous étudions dans le paragraphe suivant les liens entre dépendance linéaire et bidéterminant pour la sous-classe des *dioïdes sélectifs*.

3.3 BIDÉTERMINANT DE MATRICES À COLONNES (LIGNES) LINÉAIREMENT DÉPENDANTES : CAS DES DIOÏDES SÉLECTIFS

Dans ce paragraphe, nous ferons l'hypothèse que $(E, \oplus, \otimes)$ est un *dioïde sélectif*, c'est-à-dire que l'opération $\oplus$ est telle que, $\forall\ a \in E, \forall\ b \in E$:

$$a \oplus b = a \text{ ou } b$$

On rappelle que, dans ce cas, la relation de préordre canonique $\leq$ est une *relation d'ordre total*..

Soit $A \in M_n(E)$, $I = \{1, 2, \dots n\}$ l'ensemble des indices des lignes, $J = \{1, 2, \dots n\}$ l'ensemble des indices des colonnes, et considérons une relation de dépendance entre les colonnes, de la forme :

$$\sum_{j \in J_1} A^j = \sum_{j \in J_2} A^j$$

avec $J_1 \neq \emptyset \quad J_2 \neq \emptyset \quad J_1 \cap J_2 = \emptyset$

Remarquons que l'on peut toujours supposer que A n'a pas de colonne (ou de ligne) dont tous les termes sont égaux à ε. (En effet, si cela était le cas, on aurait de façon immédiate $\det^+(A) = \varepsilon = \det^-(A)$, cf § 3.1., Propriété 3.1.5).

Puisque $a \oplus b = a$ *ou* b ($\forall\ a \in E, \forall\ b \in E$) pour toute ligne i de A, on aura :

$$a_{i,j_1(i)} = \sum_{j \in J_1} a_{ij} \quad \text{pour un indice } j_1(i) \in J_1$$

De même :

$$a_{i,j_2(i)} = \sum_{j \in J_2} a_{ij} \quad \text{pour un indice } j_2(i) \in J_2$$

Considérons le graphe $\overline{\overline{G}}$ (graphe d'égalité) biparti dont l'ensemble des sommets est : $X \cup Y$ avec :

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ (correspondant à l'ensemble des lignes)

$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ (correspondant à l'ensemble des colonnes)

et où il existe un arc (x_i, y_j) si et seulement si

$$j = j_1(i) \text{ ou } j = j_2(i).$$

Remarquons que le graphe $\overline{\overline{G}}$ peut ne pas être connexe (comme dans l'exemple 3.3.1 ci-dessus où le sommet y_4 est isolé).

On notera : $Y_1 = \{y_j \,/\, j \in J_1\}$

$Y_2 = \{y_j \,/\, j \in J_2\}$

Exemple 3.3.1:

Soit la matrice 5 x 5 suivante (où on a marqué d'une croix les termes j_1 (i) et j_2 (i) pour chaque ligne i).

	1	2	3	4	5
1		x	x		
2	x		x		
3		x			x
4		x	x		
5	x				x

$\underbrace{1 \quad 2}_{J_1} \quad \underbrace{3 \quad 4 \quad 5}_{J_2}$

Le graphe d'égalité $\overline{\overline{G}}$ correspondant est donné à la *Figure 1*. ||

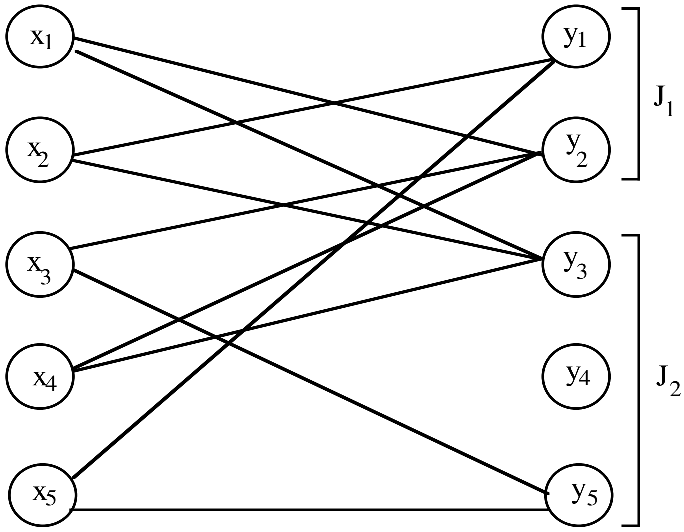


Figure 1 : Exemple de graphe d'égalité associé à une relation de dépendance

Considérons le graphe *biparti complet* $\mathcal{G}$(A) construit sur les ensembles de sommets X et Y. Chaque arc (x_i, y_j) de $\mathcal{G}$(A) correspond à un terme a_{ij} de la matrice A, et réciproquement.

A toute permutation σ de {1, 2, ..., n} on peut associer un *couplage* parfait (cf. BERGE 1970) et un seul de $\mathcal{G}$(A) et réciproquement (correspondance biunivoque).

Etant données deux permutations σ_1, σ_2 de {1,..., n}, K_1 et K_2 les couplages (parfaits) de $\mathcal{G}$(A) correspondants, l'ensemble $(K_1 \backslash K_2) \cup (K_2 \backslash K_1)$ forme un graphe partiel de $\mathcal{G}$(A) dont chaque composante connexe est un cycle *pair* élémentaire alterné en K_1 et K_2

(cf. BERGE 1970, Lemme p. 118).

Soient $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r$ ces composantes connexes de cardinalité :

$$| \gamma_1 | = 2q_1$$
$$| \gamma_2 | = 2q_2$$
$$| \gamma_r | = 2q_r$$

Considérons la permutation $\sigma = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$.

A chaque cycle γ_i (i = 1... r) correspond un cycle μ_i de G (σ) de cardinalité :

$$|\mu_i| = \frac{|\gamma_i|}{2} \geq 1$$

(les cycles de G(σ) qui ne correspondent pas à un cycle γ_i sont des boucles, de cardinalité 1).

La parité de σ est donc celle de la quantité :

$$\sum_{i=1}^{n} (|\mu_i| - 1) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|\gamma_i|}{2} - 1 \right)$$

σ_1 et σ_2 sont de parité opposée si et seulement si la permutation σ est impaire, c'est-à-dire si et seulement si le graphe associé G(σ) contient un nombre impair de circuits de cardinalité paire. On en déduit :

Lemme 3.3.2

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sigma = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$ soit impaire (c'est-à-dire pour que σ_1 et σ_2 soient de parités opposées) est que, dans $\mathcal{G}$(A), le graphe partiel engendré par $(K_1 \backslash K_2) \cup (K_2 \backslash K_1)$ contienne un nombre impair de cycles de cardinalité multiple de 4.

On peut alors énoncer :

Théorème 1 **(Gondran & Minoux 1977)**

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde sélectif (c'est-à-dire où l'opération $\oplus$ vérifie $a \oplus b = a$ *ou* b $\forall a \in S, \forall b \in S$) et soit $A \in M_n(E)$

Si les colonnes de A vérifient une relation de dépendance de la forme :

$$\sum_{j \in J_1} A^j = \sum_{j \in J_2} A^j$$

avec : $J_1 \neq \emptyset$ et $J_2 \neq \emptyset$. $J_1 \cap J_2 = \emptyset$,

alors : $\det^+(A) = \det^-(A)$

Démonstration :

Soit σ une permutation de {1,..., n} telle que :

$w(\sigma) = \prod_i a_{i,\sigma(i)} = \text{perm}(A) = \det^+(A) \oplus \det^-(A)$

(produit au sens de $\otimes$)

Remarquons que l'on a :

$w(\sigma) = \underset{\pi \in \text{Per}(n)}{\text{Max}} \{w(\pi)\}$

où le maximum est pris au sens de la relation d'ordre (total) du dioïde (E, $\oplus$, $\otimes$). (autrement dit, σ est solution optimale d'un problème de type "affectation").

Considérons le graphe d'égalité $\overline{\overline{G}}$ et ajoutons à $\overline{\overline{G}}$ les arêtes du couplage K de $\mathcal{G}(A)$ associé à la permutation σ. On obtient le graphe G'.

Considérons dans G' le cheminement suivant.

Partons d'un sommet y_{k_1} de Y_1 ($k_1 \in J_1$) ; y_{k_1} est extrémité d'une arête de K et soit x_{i_1} l'autre extrémité.

Il existe une arête de $\overline{\overline{G}}$ incidente à x_{i_1} et ayant comme autre extrémité $y_{k_2} \in Y_2$ ($k_2 = j_2(i_1)$). Remarquer que nécessairement l'arête (x_{i_1}, y_{k_2}) n'est pas dans K.

Lorsqu'on est en y_{k_2}, il existe une arête de K incidente à y_{k_2}. Soit x_{i_2} l'autre extrémité. Nécessairement $x_{i_2} \neq x_{i_1}$. Et ainsi de suite...

A un moment donné, on a construit une séquence de sommets de G' :

$y_{k_1}, x_{i_1}, y_{k_2}, x_{i_2}, \ldots x_{i_{p-1}} y_{k_p}$

Lorsqu'on est en y_{k_p} on vient de $x_{i_{p-1}}$ avec une arête $\notin$ K. D'autre part, $k_p \in J_1$ si p est impair, $k_p \in J_2$ si p est pair.

Alors il existe une arête de K incidente à y_{k_p} et soit x_{i_p} l'autre extrémité. Nécessairement $x_{i_p} \neq x_{i_{p-1}}$ puisque $(x_{i_{p-1}}, y_{k_p}) \notin$ K.

A partir de x_{i_p} il existe une arête de $\overline{\overline{G}}$ incidente à x_{i_p} et dont l'extrémité est $y_{k_{p+1}}$

avec $\quad y_{k_{p+1}} \in Y_2$ si $y_{k_p} \in Y_1$

et $\quad y_{k_{p+1}} \in Y_1$ si $y_{k_p} \in Y_2$

Nécessairement, $(x_{i_p}, y_{k_{p+1}}) \notin$ K

On voit donc que ce cheminement peut se poursuivre indéfiniment. Au bout d'un nombre fini de pas, on retombe donc nécessairement sur un sommet déjà rencontré, et ce sommet ne peut être qu'un des y_{k_i}. On a alors détecté un cycle γ de G' et γ contient autant de sommets de Y_1 que de Y_2. Soit q ce nombre. On a :

$|\gamma| = 4q.$

Par ailleurs, lorsqu'on parcourt le cycle γ, on rencontre alternativement des arêtes qui sont dans K et des arêtes qui ne sont pas dans K.

Considérons le couplage K' obtenu à partir de K en remplaçant les arêtes de $K \cap \gamma$ par les arêtes de $\gamma \backslash K$: $K' = (K \backslash \gamma) \cup (\gamma \backslash K)$.
Soit σ' la permutation associée à K'. D'après le Lemme 3.3.2., σ et σ' sont de parité opposée.
D'autre part, chaque terme $a_{i,\sigma(i)}$ est remplacé dans la permutation σ' par un terme de poids supérieur ou égal : en effet : $a_{i,\sigma'(i)} = a_{i,\sigma(i)}$ pour tout i tel que $\sigma(i) \notin J_1 \cup J_2$ et $a_{i,\sigma'(i)} \geq a_{i,\sigma(i)}$ pour $\sigma(i) \in J_1 \cup J_2$ car : $a_{i,\sigma'(i)} = \underset{j \in J_1 \cup J_2}{\operatorname{Max}} \left\{ a_{i,j} \right\}$
On a donc :

$$w(\sigma') \geq w(\sigma).$$

Mais comme σ a été choisie comme une permutation de poids maximum et que $\geq$ est une relation d'ordre total, on a nécessairement :

$w(\sigma') = w(\sigma)$ et par suite, si on avait par exemple : $w(\sigma) = \det^+(A)$
alors $w(\sigma') = \det^-(A)$ et par suite $\det^+(A) = \det^-(A)$.
(Notons que le cycle γ mis en évidence dans la démonstration ci-dessus n'est pas nécessairement unique) □

Corollaire 3.3.3

(i) Dans un dioïde sélectif $(E, \oplus, \otimes)$, si $A \in M_n(E)$ a ses colonnes linéairement dépendantes, alors il existe $\alpha \in E \backslash \{\varepsilon\}$ tel que $\alpha \otimes \det^+(A) = \alpha \otimes \det^-(A)$

(ii) Si, de plus, tout élément de $E \backslash \{\varepsilon\}$ est *régulier* pour $\otimes$ (cas des dioïdes sélectifs-quasi-groupe)
alors : $\det^+(A) = \det^-(A)$.

Démonstration

Par hypothèse, il existe J_1 et J_2 ($J_1 \cap J_2 = \emptyset$) et $\lambda_j \neq \varepsilon$ ($j \in J_1 \cup J_2$) tels que :

$$\sum_{j \in J_1} \lambda_j \otimes A^j = \sum_{j \in J_2} \lambda_j \otimes A^j$$

Considérons la matrice $\overline{A} = (\overline{A}^1, \ldots, \overline{A}^n)$ telle que :

$$\overline{A}^j = \lambda_j \otimes A^j \quad j \in J_1 \cup J_2,$$
$$\overline{A}^j = A^j \quad \forall j \notin J_1 \cup J_2.$$

Posons : $\alpha = \prod_{j \in J_1 \cup J_2} \lambda_j$

On a : $\det^+(\overline{A}) = \alpha \otimes \det^+(A)$

$\det^-(\overline{A}) = \alpha \otimes \det^-(A)$

La matrice $\overline{A}$ satisfait les hypothèses du théorème 1 donc :
$\det^+(\overline{A}) = \det^-(\overline{A})$ et l'on en déduit la première partie du corollaire.

Si $\alpha \neq \varepsilon$ est régulier, on en déduit la deuxième partie du corollaire $\det^+(A) = \det^-(A)$. □

3.4 BIDÉTERMINANT ET INDÉPENDANCE LINÉAIRE DANS LES DIOÏDES SÉLECTIFS-GROUPES

Les dioïdes sélectifs-groupes constituent une sous-classe intéressante de dioïdes auxquels s'applique le corollaire 3.3.3 du § 3.3 : pour une matrice A à colonnes linéairement dépendantes, les deux termes du bidéterminant sont égaux. Nous démontrons dans ce paragraphe une *réciproque* de ce résultat : si A est une matrice à coefficients dans un dioïde sélectif-groupe commutatif vérifiant $\det^+(A) = \det^-(A)$, alors on peut construire une relation de dépendance linéaire entre les colonnes de A (cf Théorème 2). Dans tout ce paragraphe, nous considérons donc que $\oplus$ est sélective et que $(E, \otimes)$ est un groupe commutatif. Notons que, dans ce cas, le préordre canonique sur E est un ordre total (cette propriété est utilisée dans la suite). Nous commencerons par établir deux résultats préliminaires utiles.

Lemme 3.4.1

Soient $\sigma_1 \in \mathrm{Per}^-(n)$ et $\sigma_2 \in \mathrm{Per}^+(n)$ deux permutations de $\{1, 2, ..., n\}$ de parités opposées telles que :

$$w(\sigma_1) = w(\sigma_2) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Per}(n)} w(\sigma) = \underset{\sigma \in \mathrm{Per}(n)}{\mathrm{Max}} \{w(\sigma)\}$$

(maximum pris au sens de la relation d'ordre total du dioïde).

Il existe alors une permutation paire $\overline{\sigma}_2 \in \mathrm{Per}^+(n)$ telle que :

(i) $w(\overline{\sigma}_2) = w(\sigma_2)$

(ii) Les permutations σ_1 et $\overline{\sigma}_2$ ne diffèrent que par un cycle dans $\mathcal{G}(A)$, c'est-à-dire que le graphe associé à $\overline{\sigma}_2^{-1} \circ \sigma_1$ n'a qu'un circuit pair de longueur ≥ 2 et des boucles.

Démonstration

Considérons le graphe biparti complet $\mathcal{G}(A)$ et soient K_1 et K_2 les couplages (parfaits) de $\mathcal{G}(A)$ associés aux permutations σ_1 et σ_2. On rappelle que X désigne l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}(A)$ correspondant aux lignes de A et Y, l'ensemble des sommets correspondant aux colonnes de A.

Puisque σ_1 et σ_2 sont de parités opposées, le graphe partiel de $\mathcal{G}(A)$ engendré par $(K_1 \backslash K_2) \cup (K_2 \backslash K_1)$ contient au moins une composante connexe qui est un cycle μ de cardinalité multiple de 4 : $|\mu| = 4q$.

Soit $X' \subset X$ l'ensemble des sommets x_i (lignes) appartenant à μ, et $Y' \subset Y$ l'ensemble des sommets y_j (colonnes) appartenant à μ. Posons :

$$X'' = X \backslash X' \qquad Y'' = Y \backslash Y'.$$

On a :

$|X'| = 2\,q \qquad |Y'| = 2\,q \qquad$ et $|\mu| = |X'| + |Y'|$

Considérons le graphe partiel $\overline{G}$ de $\mathcal{G}(A)$ engendré par $K_1 \cup K_2$ (l'ensemble des éléments de la matrice apparaissant dans au moins une des deux permutations σ_1 ou σ_2). μ est une composante connexe de $\overline{G}$.

La permutation σ_1 se décompose alors en deux bijections $\sigma_1^{'}$ de X' dans Y' et $\sigma_1^{''}$ de X" dans Y".

On note $\qquad \sigma_1 = (\sigma_1^{'},\ \sigma_1^{''})$

De même $\qquad \sigma_2 = (\sigma_2^{'},\ \sigma_2^{''})$

D'après le lemme 3.3.2., $\sigma_1^{'}$ et $\sigma_2^{'}$ sont de parités opposées.

Montrons que :

$$w\,(\sigma_1^{'}) = w\,(\sigma_2^{'})$$

On peut écrire : $\qquad w\,(\sigma_1) = w\,(\sigma_1^{'}) \otimes\ w\,(\sigma_1^{''})$

$\qquad\qquad\qquad w\,(\sigma_2) = w\,(\sigma_2^{'}) \otimes\ w\,(\sigma_2^{''})$

Si on avait par exemple :

$$w\,(\sigma_1^{'}) < w\,(\sigma_2^{'})$$

Alors la permutation :

$\overline{\sigma} = (\sigma_2^{'},\ \sigma_1^{''})$ aurait un poids $w\,(\overline{\sigma}) > w\,(\sigma_1)$, en contradiction avec le fait que σ_1 est de poids maximum.

De même on ne peut avoir : $w\,(\sigma_1^{'}) > w\,(\sigma_2^{'})$.

Par suite, $w\,(\sigma_1^{'}) = w\,(\sigma_2^{'})$ (parce que $\geq$ est une relation d'ordre total).

La permutation $\overline{\sigma}_2$ cherchée est alors

$$\overline{\sigma}_2 = (\sigma_2^{'},\ \sigma_1^{''}). \qquad \square$$

Lemme 3.4.2

Soient $\sigma_1 \in Per^-(n)$ et $\sigma_2 \in Per^+(n)$ deux permutations de poids maximum, et notons K_1 et K_2 les couplages de $\mathcal{G}(A)$ qui leur sont associés. On suppose :

- que $a_{i,\sigma_1(i)} = a_{i,\sigma_2(i)}$ pour i = 1, 2, ... , n
- que le graphe partiel $\overline{\overline{G}}$ induit par $(K_1 \setminus K_2) \cup (K_2 \setminus K_1)$ est connexe et constitué par un cycle μ de cardinalité 4 q (q entier) avec éventuellement des arborescences pendantes de cardinalité paire.

Alors pour tout $x_i \in \mu$ et pour tout $y_k \in \mu$:

$$a_{i,k} \leq a_{i,\sigma_1(i)} = a_{i,\sigma_2(i)}$$

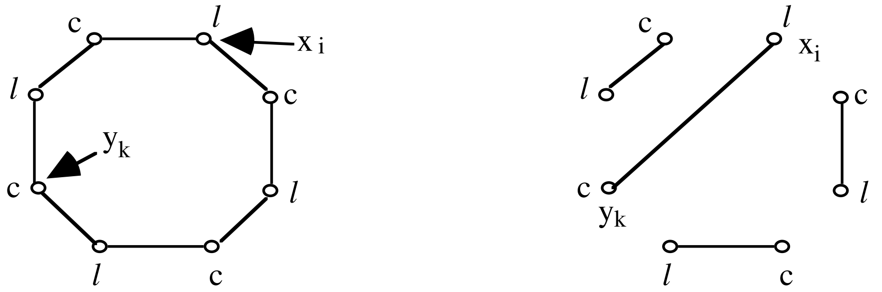
Démonstration

Elle se fait par l'absurde, en supposant qu'il existe $x_i \in \mu$ et $y_k \in \mu$ tels que :

$$a_{i,k} > a_{i,\sigma_1(i)} = a_{i,\sigma_2(i)}$$

et en montrant que l'on met alors en évidence une permutation σ^* telle que

$$w(\sigma^*) > w(\sigma_1) = w(\sigma_2).$$



l = "ligne"
c = "colonne"

(5a) Cycle μ

l = "ligne"
c = "colonne"

(5b) Couplage parfait

Figure 5

Il est facile de voir (cf. figure 5) qu'il existe un couplage parfait pour les sommets de μ utilisant l'arête (x_i, y_k) et tel que les autres arêtes appartiennent toutes à μ (en effet, les cardinalités des deux chemins entre une ligne i et une colonne k sur le cycle μ sont impaires).

Il existe donc un couplage parfait pour les sommets de $\overline{\overline{G}}$ utilisant l'arête (x_i, y_k) et tel que les autres arêtes appartiennent toutes à $\overline{\overline{G}}$ (les arborescences paires pendantes ne posant pas de problème).

Soit σ^* la permutation correspondant à ce couplage parfait.

Nous avons alors :

$$a_{ik} = a_{i,\sigma^*(i)} > a_{i,\sigma_1(i)} = a_{i,\sigma_2(i)}$$

et pour tout $l = \{1... n\}\backslash\{i\}$

$$a_{l,\sigma^*(l)} = a_{l,\sigma_1(l)} = a_{l,\sigma_2(l)}$$

On en déduit :

$$w(\sigma^*) > w(\sigma_1) = w(\sigma_2)$$

ce qui est contraire à l'optimalité de σ_1 et de σ_2.

(Remarque : on a utilisé ci-dessus le fait que, dans un dioïde sélectif-groupe, pour tout $c \neq \varepsilon$ on a : $a < b \Rightarrow a \otimes c < b \otimes c$.

En effet, $\leq$ est compatible avec la loi $\otimes$ donc : $a < b \Rightarrow a \otimes c \leq b \otimes c$.

Mais on ne peut avoir l'égalité car $c \neq \varepsilon$ étant régulier, $a \otimes c = b \otimes c \Rightarrow a = b$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc : $a \otimes c < b \otimes c$). □

Nous pouvons alors énoncer le :

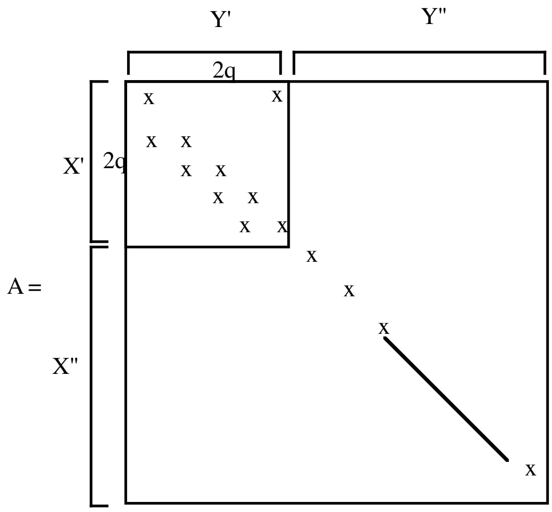
Théorème 2 **(Gondran & Minoux 1977)**
Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde sélectif-groupe commutatif et $A \in M_n(E)$.
Si $\quad \det^+(A) = \det^-(A)$
alors les colonnes de A (et de la même façon les lignes de A) sont *linéairement dépendantes*. Autrement dit, il existe J_1 et J_2 ($J_1 \neq \emptyset$, $J_2 \neq \emptyset$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$) et des coefficients $\lambda_j \in E\backslash\{\varepsilon\}$ (pour $j \in J_1 \cup J_2$) tels que :

$$\sum_{j \in J_1} \lambda_j \otimes A^j = \sum_{j \in J_2} \lambda_j \otimes A^j \qquad (6)$$

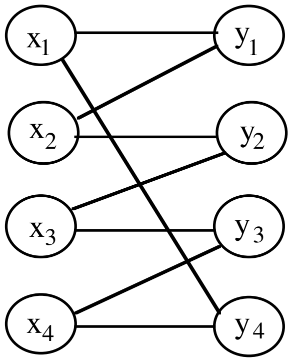
Démonstration
1) Comme $\oplus$ est sélective, il existe deux permutations σ_1 et σ_2 de parités opposées, telles que :

$$w(\sigma_1) = w(\sigma_2) = \sum_{\sigma \in Per(n)} w(\sigma) = \underset{\sigma \in Per(n)}{\mathrm{Max}} \{w(\sigma)\}$$

Remarquons que les permutations σ_1 et σ_2 restent optimales lorsque l'on multiplie une ou plusieurs colonnes A^j de A par λ_j ($\lambda_j \neq \varepsilon$).
D'après le lemme 3.4.1 on peut supposer que σ_2 ne diffère de σ_1 que par un cycle pair.
2) Si on représente par une croix les éléments a_{ij} de la matrice A tels que $j = \sigma_1(i)$ *ou* $j = \sigma_2(i)$ et après réarrangement éventuel des lignes et des colonnes, on obtient la configuration ci-après :



Considérons alors la sous matrice A' de A formée par les 2q premières lignes (X'), les 2q premières colonnes (Y') et par les éléments marqués d'une croix (les autres éléments de A' étant ε).
Dans l'exemple suivant, le cycle μ du lemme 3.4.1 rencontre successivement x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_1 (sa cardinalité est $|\mu| = 8$).



$$A' = \begin{array}{c|cccc|} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & a_{11} & \varepsilon & \varepsilon & a_{14} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \varepsilon & \varepsilon \\ x_3 & \varepsilon & a_{32} & a_{33} & \varepsilon \\ x_4 & \varepsilon & \varepsilon & a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array}$$

Cherchons à déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in E\backslash\{\varepsilon\}$ et les ensembles J_1 et $J_2 \subset \{1, 2, ..., 2q\}$ de façon à ce que l'on ait, pour la matrice A' :

$$\sum_{j\in J_1} \lambda_j \otimes A'^j = \sum_{j\in J_2} \lambda_j \otimes A'^j \qquad (7)$$

On pourra choisir un des λ_j arbitrairement (puisque $\otimes$ est inversible), par exemple $\lambda_1 = e$. On construira les ensembles J_1 et J_2, en parcourant le cycle μ et en mettant les colonnes (sommets y) successivement rencontrées alternativement dans J_1 et dans J_2.

Ainsi dans l'exemple, en partant de x_1 :

on arrive à y_1 que l'on attribue à J_1 ;
puis de x_2 on arrive à y_2 que l'on attribue à J_2 ;
puis de x_3 on arrive à y_3 que l'on attribue à J_1 ;
enfin de x_4 on arrive à y_4 que l'on attribue à J_2.

On obtient donc : $J_1 = \{1, 3\}$ $\qquad J_2 = \{2, 4\}$

Les λ_j sont alors déterminés de façon à satisfaire la relation (7). Si $\lambda_1 = e$ on doit avoir nécessairement :

$\lambda_1 \otimes a_{11} = \lambda_4 \otimes a_{14}$ d'où : $\lambda_4 = a_{11} \otimes (a_{14})^{-1}$

puis $\lambda_4 \otimes a_{44} = \lambda_3 \otimes a_{43}$ d'où : $\lambda_3 = \lambda_4 \otimes a_{44} \otimes (a_{43})^{-1}$

puis $\lambda_3 \otimes a_{33} = \lambda_2 \otimes a_{32}$ d'où : $\lambda_2 = \lambda_3 \otimes a_{33} \otimes (a_{32})^{-1}$

Puisque $w(\sigma_1') = w(\sigma_2')$

on a : $a_{11} \otimes a_{22} \otimes a_{33} \otimes a_{44} = a_{14} \otimes a_{21} \otimes a_{32} \otimes a_{43}$

et on vérifie que la deuxième relation :

$$\lambda_2 \otimes a_{22} = \lambda_1 \otimes a_{21}$$

est automatiquement satisfaite.

Ce qui précède se généralise de façon immédiate au cas où μ a une cardinalité $|\mu| = 4q$ quelconque ($q > 1$).

3) Multiplions chaque colonne j de $A_{X'}^{Y'}$ par la valeur λ_j ainsi déterminée ([1]). On obtient une matrice $\overline{A} = (\bar{a}_{ij})$ de dimensions (2q x 2q) telle que :

$$\forall i : \bar{a}_{i,\sigma_1(i)} = \bar{a}_{i,\sigma_2(i)} \in J_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2(i) \in J_2.$$

Par cette transformation une permutation optimale reste optimale, σ_1 et σ_2 restent donc des permutations de poids maximum.

Démontrons maintenant que l'on a bien :

$$\sum_{j \in J_1} \overline{A}^j = \sum_{j \in J_2} \overline{A}^j \qquad (8)$$

Pour cela, il suffit de remarquer qu'en vertu du lemme 3.4.2., tout terme $\bar{a}_{ij}$ de $\overline{A}$ est inférieur ou égal à $\bar{a}_{i,\sigma_{1(i)}} = \bar{a}_{i,\sigma_{2(i)}}$.

4) Revenons maintenant à la matrice initiale A.

Pour chaque ligne $x_i \in X''$, donc pour i = 2q + 1, ..., n, soit :

$$b_i = \max_{y_j \in Y'} \left\{a_{ij} \otimes \lambda_j\right\} = \sum_{y_j \in Y'} a_{ij} \otimes \lambda_j$$

Montrons alors qu'il existe n - 2q coefficients λ_j associés aux colonnes de Y'' (et aux lignes de X'') tels que, $\forall x_i \in X''$:

$$a_{ii} \otimes \lambda_i = \sum_{\substack{y_j \in Y'' \\ j \neq i}} a_{ij} \otimes \lambda_j \oplus b_i \qquad (9)$$

Le système (9) est équivalent au système :

$$\lambda_i = \sum_{\substack{y_j \in Y'' \\ j \neq i}} a_{ij} \otimes a_{ii}^{-1} \otimes \lambda_j \oplus a_{ii}^{-1} \otimes b_i \qquad \forall x_i \in X'' \qquad (10)$$

Puisque la permutation identité est une permutation optimale de la matrice $A_{X''}^{Y''}$ il en découle que le graphe associé à la matrice $(a_{ij} \otimes a_{ii}^{-1})_{\substack{i \in X'' \\ j \in Y''}}$ a tous ses circuits de poids plus petit que l'unité e. Cette propriété reste vraie si l'on remplace tous les termes diagonaux de cette matrice par ε, c'est-à-dire pour la matrice du système (10).

Alors, la matrice du système (10) est *quasi-inversible* et le système (10) admet une plus petite solution λ.

---

(1) On note $A_{X'}^{Y'}$ la sous-matrice de A induite par le sous-ensemble de lignes X' et le sous-ensemble de colonnes Y'.

Avec les valeurs λ ainsi déterminées, on a, $\forall\, x_i \in X''$:

$$a_{ii} \otimes \lambda_i = \sum_{\substack{y_j \in Y \\ j \neq i}} a_{ij} \otimes \lambda_j \qquad (11)$$

Pour chaque i = 2 q +1, … n, il existe donc un indice φ (i) $\neq$ i tel que :

$$a_{ii} \otimes \lambda_i = a_{i,\,\varphi(i)} \otimes \lambda_{\varphi(i)} = \sum_{\substack{y_j \in Y \\ j \neq i}} a_{ij} \otimes \lambda_j \qquad (12)$$

5) Notons $\tilde{G}$ le graphe partiel de $\mathcal{G}$ (A) défini de la façon suivante :

– $\forall\, x_i \in X'$, $\tilde{G}$ contient les deux arêtes du cycle μ incidentes à x_i.

– $\forall\, x_i \in X''$, $\tilde{G}$ contient les deux arêtes (x_i, y_i) et $(x_i, y_{\varphi(i)})$.

Comme $\tilde{G}$ a autant d'arêtes que de sommets, chacune de ses composantes connexes contient exactement un cycle élémentaire et éventuellement des arborescences pendantes.

Montrons qu'il n'est pas restrictif de supposer que $\tilde{G}$ est connexe.

Si $\tilde{G}$ n'est pas connexe, il possède une composante connexe $\mathfrak{C}$ dont tous les sommets appartiennent à X'' $\cup$ Y''.

Pour tout $x_i \in \mathfrak{C}$ on ne peut avoir l'inégalité stricte.

$$a_{ii} \otimes \lambda_i = a_{i,\,\varphi(i)} \otimes \lambda_{\varphi(i)} > \sum_{\substack{y_j \in Y \\ y_j \notin \mathfrak{C}}} a_{ij} \otimes \lambda_j \qquad (13)$$

En effet, si (13) est vérifiée $\forall\, x_i \in \mathfrak{C}$, alors il serait possible de diminuer tous les λ_j, $y_j \in \mathfrak{C}$ tout en satisfaisant (9), ce qui contredirait le fait que λ est solution minimale de (9).

Par suite, il existe $x_i \in \mathfrak{C}$ et $y_k \notin \mathfrak{C}$ tels que :

$a_{ii} \otimes \lambda_i = a_{i,\,\varphi(i)} \otimes \lambda_{\varphi(i)} = a_{ik} \otimes \lambda_k$

On peut alors remplacer dans $\tilde{G}$ l'arête $(x_i, y_{\varphi(i)})$ par (x_i, y_k) ce qui diminue d'une unité le nombre de connexité de $\tilde{G}$. On repétera si nécessaire le raisonnement précédent tant que la condition de connexité n'est pas satisfaite, pour obtenir en un nombre fini d'étapes un graphe $\tilde{G}$ connexe.

La figure 7b montre le graphe $\tilde{G}$ (connexe) correspondant à la matrice de la figure 7a où, dans chaque ligne, les croix correspondent aux termes a_{ii} et $a_{i,\,\varphi(i)}$ de la relation (12).

6) Comme chaque sommet de $\tilde{G}$ associé à une ligne a un degré exactement 2, on remarque que :

– les branches arborescentes de $\tilde{G}$ se rattachent nécessairement à μ en des sommets $y_j \in Y'$ (colonnes) ;
– les sommets pendants (i.e. de degré 1) de ces branches arborescentes sont nécessairement des sommets $y_j \in Y''$ (colonnes).

Les colonnes de Y" peuvent alors aisément être attribuées soit à J_1 soit à J_2 en procédant de la façon suivante.
Chaque branche arborescente est parcourue à partir de son sommet de rattachement à μ, lequel appartient déjà soit à J_1, soit à J_2. Entre ce sommet et chaque sommet pendant, les sommets y_j sont alternativement affectés à J_1 et à J_2. Ainsi, pour l'exemple de la Figure *7b* (où on sait déjà que $J_1 = \{1, 3\}$ et $J_2 = \{2, 4\}$) en parcourant la branche rattachée à y_3 la colonne 8 est rajoutée dans J_2 et les colonnes 6 et 10 dans J_1.
On obtiendra finalement :
$J_1 = \{1, 3, 6, 7, 9, 10\}$ $\qquad$ $J_2 = \{2, 4, 5, 8\}$
7) Avec les valeurs λ_j et les ensembles J_1 et J_2 découlant de ce qui précède, on satisfait les relations :
$\forall$ i = 1, 2, … 2q :

$$\sum_{j \in J_1 \cap Y'} a_{ij} \otimes \lambda_j = \sum_{j \in J_2 \cap Y'} a_{ij} \otimes \lambda_j \qquad (14)$$

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
X'	x_1	**x**	**x**								
	x_2		**x**	**x**							
	x_3			**x**	**x**						
	x_4	**x**			**x**						
X"	x_5	x				x					
	x_6						x		x		
	x_7				x			x			
	x_8			x					x		
	x_9				x					x	
	x_{10}								x		x

Y' (colonnes y_1–y_4) $\qquad$ Y" (colonnes y_5–y_{10})

Figure 7 a

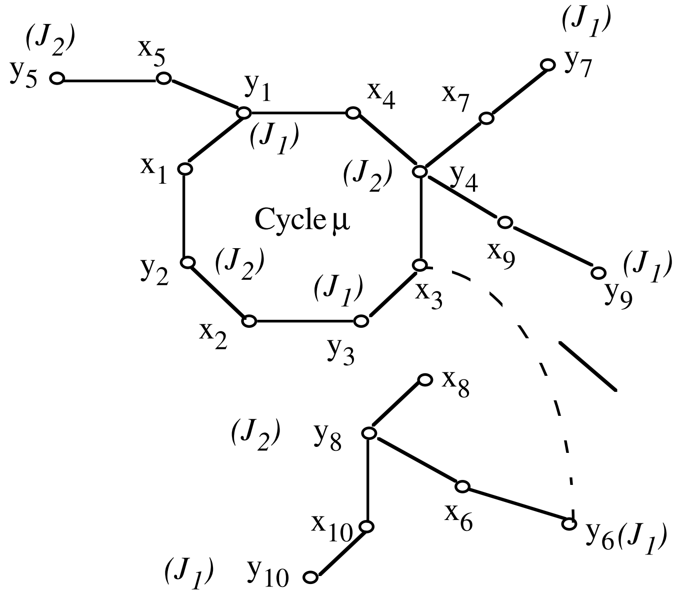


Figure 7b

et $\forall$ i = 2 q + 1 … n :

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} \otimes \lambda_j = \sum_{j \in J_2} a_{ij} \otimes \lambda_j \tag{15}$$

Il reste à vérifier la relation :

$\forall$ i = 1, … 2q :

$$\sum_{j \in J_1} a_{ij} \otimes \lambda_j = \sum_{j \in J_2} a_{ij} \otimes \lambda_j \tag{16}$$

et pour cela, nous allons montrer que :

$\forall\ x_i \in X'$ et $y_k \in Y''$:

$$\underset{j \in J_1 \cap Y'}{\mathrm{Max}} \left\{a_{ij}\right\} = \underset{j \in J_2 \cap Y'}{\mathrm{Max}} \left\{a_{ij}\right\} \geq a_{ik}$$

Ceci va se faire par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la démonstration du lemme 3.4.2. Supposons que pour $x_i \in X'$ et $y_k \in Y''$, on ait $a_{ik} > a_{i\sigma_1(i)} = a_{i\sigma_2(i)}$. L'arête (x_i, y_k) joint un sommet $x_i \in \mu$ à un sommet $y_k \notin \mu$. Soit $y_j \in \mu$ le point de rattachement de la branche arborescente de $\tilde{G}$ contenant y_k. On construit un couplage parfait de $\tilde{G} \cup \{(x_i, y_k)\}$ en sélectionnant :

– toutes les arêtes du couplage maximum de μ laissant insaturés x_i et y_j ;
– le couplage maximum de la chaîne L joignant y_j et y_k laissant insaturé le sommet y_k ;
– l'arête (x_i, y_k) ;
– toutes les arêtes de la forme (x_i, y_i) pour tous les sommets
i n'appartenant ni à μ, ni à L.

Soit σ^* la permutation correspondant à ce couplage parfait (la Figure 8 illustre le couplage obtenu sur l'exemple de la Figure 7, en prenant $x_i = x_3$ et $y_k = y_6$).

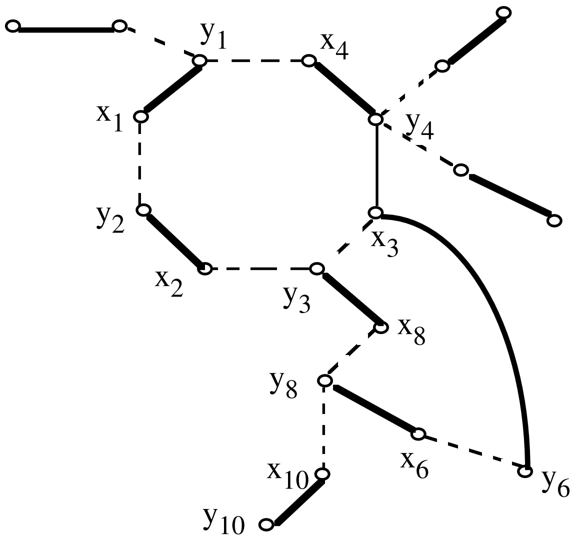


Figure 8

On a alors $a_{ik} = a_{i, \sigma^*(i)} > a_{i, \sigma_1(i)} = a_{i, \sigma_2(i)}$ et, $\forall\ l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$:

$a_{l, \sigma^*(l)} = a_{l, \sigma_1(l)} = a_{l, \sigma_2(l)}$

d'où l'on déduit $w(\sigma^*) > w(\sigma_1) = w(\sigma_2)$, ce qui est contraire à l'optimalité de σ_1 et de σ_2.

On en déduit la relation (16) et le théorème est démontré. □

Une conséquence directe de ce résultat et du Corollaire 3.3.3 est la caractérisation des matrices singulières sur les dioïdes sélectifs-groupes commutatifs :

Corollaire 3.4.3

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde sélectif-groupe commutatif. $A \in M_n(E)$ est singulière si et seulement si $\det^+(A) = \det^-(A)$.

3.5 BIDÉTERMINANT ET INDÉPENDANCE LINÉAIRE DANS LES DIOÏDES MAX-MIN OU MIN-MAX

On s'intéresse dans ce paragraphe aux propriétés du bidéterminant pour une autre sous-classe importante de dioïdes, les dioïdes MAX-MIN (ou MIN-MAX). Cette sous-classe appartient à l'intersection des *dioïdes double sélectifs* et des *treillis distributifs*.

Un dioïde MAX-MIN est donc un dioïde sélectif $(E, \oplus, \otimes)$ avec la propriété additionnelle :

$$\forall\, a \in E, \forall\, b \in E : a \otimes b = \text{Min}\ \{a, b\}$$

(le minimum ci-dessus s'entendant au sens de la relation d'ordre total dérivant de la loi $\oplus$ sur E).

On voit donc qu'un dioïde MAX-MIN peut être défini de façon plus directe à partir d'un ensemble E totalement ordonné muni des lois $\oplus$ et $\otimes$ suivantes :

$$\forall\, a \in E, b \in E : \quad a \oplus b = \text{Max}\ \{a, b\}$$
$$a \otimes b = \text{Min}\ \{a, b\}$$

On remarque qu'il s'agit aussi de dioïdes *double-sélectifs* particuliers.

L'exemple suivant montre que, pour une matrice A à éléments dans un dioïde MAX-MIN $(E, \oplus, \otimes)$, l'existence d'une relation de dépendance linéaire de la forme :

$$\sum_{j \in J_1} \lambda_j \otimes A^j = \sum_{j \in J_2} \lambda_j \otimes A^j$$

(avec $J_1 \neq \emptyset$, $J_2 \neq \emptyset$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ et $\lambda_j \neq \varepsilon$ pour $j \in J_1 \cup J_2$) n'implique pas nécessairement $\det^+(A) = \det^-(A)$.

Exemple 3.5.1

Sur le dioïde $(\mathbb{R}^+, \text{Max}, \text{Min})$ considérons la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Pour $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 2$ on a bien la relation de dépendance :

$$\lambda_2 \otimes A^2 = \lambda_3 \otimes A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cependant on remarque que :

$\det^+(A) = 3$ (le poids de la permutation paire σ de poids maximum définie par :
$\sigma(1) = 1$; $\sigma(2) = 2$; $\sigma(3) = 3$), et :

$\det^-(A) = 2$ (le poids de la permutation impaire σ' de poids maximum défini par :
$\sigma'(1) = 1$; $\sigma'(2) = 3$; $\sigma'(3) = 2$).

On a donc dans cet exemple, $\det^+(A) \neq \det^-(A)$ malgré la dépendance linéaire des colonnes. ||

On remarquera que la situation mise en évidence dans l'exemple précédent peut s'expliquer par le fait que les coefficients λ_2 et λ_3 ont été choisis trop petits.

Plus généralement, si A^j et A^k sont deux colonnes quelconques distinctes dont tous les termes sont > 0, en choisissant λ_j et λ_k vérifiant.

$$0 < \lambda_j = \lambda_k \leq \underset{i=1\ldots n}{\mathrm{Min}} \left\{\mathrm{Min}\left\{a_{i,j} ; a_{i,k}\right\}\right\}$$

alors on a : $\quad \lambda_j \otimes A^j = \lambda_k \otimes A^k$

même pour une matrice quelconque telle que $\det^+(A) \neq \det^-(A)$.

Le résultat suivant montre que choisir tous les $\lambda_j \geq \mathrm{perm}\,(A)$ dans la relation de dépendance est suffisant pour garantir l'égalité des deux termes du bidéterminant.

Propriété 3.5.2

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde MAX-MIN et $A \in M_n(E)$.

Si les colonnes de A vérifient une relation de dépendance linéaire de la forme :

$$\sum_{j\in J_1} \lambda_j \otimes A^j = \sum_{j\in J_2} \lambda_j \otimes A^j$$

avec, $\quad \forall j : \quad \lambda_j \geq \mathrm{perm}\,(A) = \det^+(A) \oplus \det^-(A)$

alors $\det^+(A) = \det^-(A)$.

Démonstration

En utilisant le corollaire 3.3.3. du § 3.3, on obtient :

$\det^+(\overline{A}) = \quad \alpha \otimes \det^+(A)$

$\det^-(\overline{A}) = \quad \alpha \otimes \det^-(A)$

avec $\det^+(\overline{A}) = \det^-(\overline{A})$ et $\alpha = \prod_{j\in J_1 \cup J_2} \lambda_j$ (produit au sens de $\otimes$).

La condition :

$$\alpha = \underset{j\in J_1 \cup J_2}{\mathrm{Min}} \left\{\lambda_j\right\} \geq \mathrm{perm}(A) = \mathrm{Max}\left\{\det{+}\,(A), \det{-}\,(A)\right\}$$

entraîne alors :

$\alpha \otimes \det^+(A) = \det^+(A)$

$\alpha \otimes \det^-(A) = \det^-(A)$

d'où le résultat cherché. □

Etudions maintenant la réciproque de la propriété précédente.

L'exemple ci-dessous montre que, contrairement au cas des dioïdes sélectifs-groupes (cf. § 3.4) $\det^+(A) = \det^-(A)$ n'implique pas nécessairement l'existence d'une relation de dépendance linéaire de la forme

$$\sum_{j \in J_1} \lambda_j \otimes A^j = \sum_{j \in J_2} \lambda_j \otimes A^j \qquad (17)$$

avec $\quad \forall$ j, $\quad \lambda_j \geq$ perm (A) (18)

Exemple 3.5.3

Dans le dioïde ($\mathbb{R}^+$, Max, Min)

considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

qui vérifie $\det^+$ (A) = $\det^-$ (A) = 2 et perm (A) = 2.

On remarque que, pour tout j = 1, …, 3, si $\lambda_j \geq 2$, alors $\lambda_j \otimes A^j = A^j$

Par conséquent, s'il existe une relation de dépendance vérifiant (17) et (18), elle est nécessairement de la forme

$$\sum_{j \in J_1} A^j = \sum_{j \in J_2} A^j$$

avec $J_1 \neq \emptyset$, $J_2 \neq \emptyset$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$.

On observe aisément que ceci est impossible si $|J_1| = |J_2| = 1$ (car les trois colonnes de A sont distinctes) et également impossible si $|J_1| = 1$ et $|J_2| = 2$ (car, dans la première ligne, aucun des coefficients n'est égal au maximum des deux autres). ||

D'après l'exemple précédent, on voit que dans un dioïde MAX-MIN la singularité d'une matrice $A \in M_n$ (E) ne peut être caractérisée par l'égalité $\det^+$ (A) = $\det^-$ (A).

Nous allons voir que pour des matrices $A \in M_n(E)$ satisfaisant une condition additionnelle, dite de *non-dégénérescence* il est néanmoins possible de caractériser la singularité des matrices dans les dioïdes MAX-MIN en termes de *coloration d'hypergraphes.*

Définition 3.5.4

$A \in M_n$ (E) est dite *non-dégénérée* si il n'existe pas une ligne i contenant deux termes

a_{ij} et a_{ik} tels que $a_{ij} = a_{ik} <$ perm (A)

Remarque

On notera que vérifier la non-dégénérescence d'une matrice peut se faire en temps polynomial puisque le calcul de perm (A) se ramène à un problème d'affectation "Max-Min" ou "bottleneck". ||

Pour les matrices *non-dégénérées*, on a la propriété suivante.

Propriété 3.5.5

Soit $A \in M_n(E)$ une matrice non dégénérée.

S'il existe une relation de dépendance impliquant un sous-ensemble de colonnes de A, alors il existe une relation de dépendance *complète*, c'est-à-dire dans laquelle interviennent toutes les colonnes de A.

Démonstration

Supposons qu'il existe une relation de dépendance de la forme

$$\sum_{j \in J_1} \lambda_j \otimes A^j = \sum_{j \in J_2} \lambda_j \otimes A^j$$

avec $J_1 \neq \emptyset$, $J_2 \neq \emptyset$ $\quad J_1 \cap J_2 = \emptyset$

et $J_1 \cup J_2 \neq J = \{1, \ldots, n\}$

En multipliant les deux membres de la relation ci-dessus par $\bar{\lambda} = \text{perm}(A)$

et en remarquant que pour $\lambda_j \geq \text{perm}(A)$ $\bar{\lambda} \otimes \lambda_j = \bar{\lambda}$ on obtient :

$\forall i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\sum_{j \in J_1} \bar{\lambda} \otimes a_{ij} = \sum_{j \in J_2} \bar{\lambda} \otimes a_{ij} = v_i$$

On a nécessairement $v_i \leq \bar{\lambda}$.

Si pour $i \in I$, on a : $v_i < \bar{\lambda}$, ceci implique qu'il existe $j_1 \in J_1$ et $j_2 \in J_2$ tels que :

$a_{i,j_1} = a_{i,j_2} a = v_i < \bar{\lambda}$

ce qui implique une contradiction avec l'hypothèse de non dégénérescence.

On a donc, $\forall$ $i \in E$: $v_i = \bar{\lambda}$ et par suite en posant $\lambda'_j = \bar{\lambda}$ (pour tout $j \in J$)

$J'_1 = J_1 \qquad J'_2 = J \setminus J_1$ on a la relation :

$$\forall i \in I : \sum_{j \in J'_1} \lambda'_j \otimes a_{ij} = \sum_{j \in J'_2} \lambda'_j \otimes a_{ij}$$

qui est une relation de dépendance *complète* sur l'ensemble des colonnes de A. □

Introduisons maintenant la notion d'*hypergraphe-squelette* d'une matrice A donnée :

Définition 3.5.6

Soit $A \in M_n(E)$ et $\bar{\lambda} = \text{perm}(A)$)

On appelle *hypergraphe-squelette* de A l'hypergraphe $H(A) = [J, \mathcal{S}(A)]$ ayant $J = \{1, \ldots, n\}$ comme ensemble de sommets et dont l'ensemble des arêtes est :

$\mathcal{S}(A) = \{S_1(A), S_2(A), \ldots S_n(A)\}$

où, $\forall i \in I$, $S_i(A) = \{j \,/\, \bar{\lambda} \otimes a_{ij} = \bar{\lambda}\} = \{j \,/\, a_{ij} \geq \text{perm}(A)\}$.

Dans H (A), chaque arête correspond à une ligne de A, et contient au moins un sommet.

En effet, puisque $\bar{\lambda}$ = perm (A), il existe au moins une permutation σ de {1, …, n} telle que :
$w(\sigma) = a_{1, \sigma(1)} \otimes a_{2, \sigma(2)} \otimes \ldots \otimes a_{n, \sigma(n)} = \bar{\lambda}$.
Ce qui implique que, $\forall\, i \in I : a_{i, \sigma(i)} \geq \bar{\lambda}$
d'où $\bar{\lambda} \otimes a_{i, \sigma(i)} = \bar{\lambda}$
ce qui montre que $\sigma(i) \in S_i(A)$.

Le *nombre chromatique* d'un hypergraphe H (cf. BERGE 1970) est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer les sommets de H de façon à ce que pour chaque arête ayant au moins 2 sommets, tous les sommets n'aient pas la même couleur. Un hypergraphe de nombre chromatique 2 est dit *bicolorable*. On peut alors énoncer la caractérisation suivante de matrices non dégénérées singulières dans un dioïde MAX-MIN :

Théorème 3 (Minoux 1982)
Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde MAX-MIN. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice non dégénérée $A \in M_n(E)$ soit singulière est que l'hypergraphe-squelette H (A) vérifie :
(i) chaque arête de H (A) a au moins 2 sommets
(ii) H (A) est bicolorable.

Démonstration
(a) Pour $A \in M_n(E)$ avec $\bar{\lambda}$ = perm (A)
notons $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ la matrice dont les coefficients sont :
$\bar{a}_{ij} = \bar{\lambda} \otimes a_{ij}$
Clairement, A est non-dégénérée si et seulement si $\bar{A}$ est non-dégénérée.
Par suite, une matrice $A \in M_n(E)$ non-dégénérée est singulière (a un sous-ensemble de colonnes dépendantes) si et seulement si il existe J_1 et J_2, tels que :

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j \in J_1} \bar{A}^j = \sum\limits_{j \in J_2} \bar{A}^j \\ \text{avec :} \\ J_1 \neq \emptyset ; J_2 \neq \emptyset ; J_1 \cap J_2 = \emptyset \\ J_1 \cup J_2 = J \end{array}\right\} \qquad (19)$$

(b) Supposons maintenant que A soit singulière. Comme A est non-dégénérée, d'après la propriété 3.5.5., il existe une relation de dépendance linéaire complète de la forme (19) sur les colonnes de $\bar{A} = \bar{\lambda} \otimes A$ avec $\bar{\lambda}$ = perm (A).

Alors, en attribuant une couleur aux sommets de H (A) correspondant aux colonnes $j \in J_1$ et une autre couleur aux sommets de H (A) correspondant aux colonnes $j \in J_2$, on obtient une bicoloration de H (A).

Réciproquement, supposons que H (A) soit bicolorable et que chaque arête contienne au moins 2 sommets. Ceci signifie que $J = \{1, \ldots, n\}$ peut être partitionné en $J_1 \neq \emptyset$ (l'ensemble des sommets ayant la couleur 1) et $J_2 \neq \emptyset$ (l'ensemble des sommets ayant la couleur 2), de telle sorte que chaque ligne i de $\overline{A}$ contienne au moins deux termes $\bar{a}_{ij_1}$ et $\bar{a}_{ij_2}$ égaux à $\overline{\lambda}$ avec $j_1 \in J_1$ et $j_2 \in J_2$.

On a donc une relation de dépendance complète de la forme (19) pour les colonnes de $\overline{A}$ ce qui, d'après (a), montre que A est singulière. □

PARTIE 2

VALEURS PROPRES ET SEMI-MODULES PROPRES

1 - INTRODUCTION

Cette deuxième partie est consacrée à la caractérisation des *valeurs propres* et des *vecteurs propres* d'endomorphismes de semi-modules et de moduloïdes.
Dans le § 2 on étudie des conditions permettant de garantir l'existence de valeurs propres et de vecteurs propres. Ces conditions font intervenir la quasi-inverse A* de la matrice A associée à l'endomorphisme.
Dans le § 3, on établit, pour différentes classes de dioïdes idempotents, des résultats permettant de caractériser le moduloïde propre associé à une valeur propre donnée.
Le § 4 est consacré à l'étude du cas particulier des dioïdes à structure de groupe multiplicatif. Un analogue du classique théorème de PERRON-FROBENIUS est obtenu pour une sous-classe de dioïdes sélectifs-groupes dans le § 4.2.
Quelques applications intéressantes de la recherche de valeurs propres et de vecteurs propres dans les dioïdes sont présentées dans les paragraphes 6 et 7 : classification hiérarchique, analyse des préférences, théorie des systèmes dynamiques linéaires dans le dioïde ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, Max, +).

2 - EXISTENCE DE VALEURS PROPRES ET DE VECTEURS PROPRES : RÉSULTATS GENERAUX

Soit (E, $\oplus$, $\otimes$) un semi-anneau (où ε est l'élément neutre de $\oplus$ et e l'élément neutre de $\otimes$) et notons $M = E^n$ le semi-module dont les éléments sont les vecteurs à n composantes appartenant à E. L'opération interne de M est l'opération $\oplus$ définie par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \oplus y_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \oplus y_n \end{pmatrix}$$

et l'opération externe $\otimes$ est définie par :

$$\forall \lambda \in E : \quad \lambda \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \otimes x_1 \\ \lambda \otimes x_2 \\ \vdots \\ \lambda \otimes x_n \end{pmatrix}$$

Soit h : M $\to$ M un endomorphisme de M. Puisque tout vecteur $x \in M$ peut s'écrire :

$x = x_1 \otimes e_1 \oplus x_2 \otimes e_2 \oplus \ldots \oplus x_n \otimes e_n$ (où, $\forall$ j = 1, … n, e_j dénote le vecteur dont la $j^{\text{ième}}$ composante est e et toutes les autres composantes ε) on voit que h est parfaitement défini par la donnée des n vecteurs h (e_1), h (e_2) ... h (e_n), ou encore par la matrice A $= \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots n}}$ dont les colonnes sont h (e_1), … h (e_n).

On a alors, $\forall\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in M : \quad h(x) = A \otimes x$

en définissant le produit de la matrice $A \in M_n$ (E) par le vecteur $x \in M$ par :

$$\forall\ i : \quad (A \otimes x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes x_j$$

(la sommation ci-dessus s'entendant au sens de l'opération $\oplus$ du semi-anneau). Ainsi, pour les semi-modules de dimension finie n, il y a correspondance biunivoque entre les endomorphismes et les matrices carrées n x n à coefficients dans E.

Etant donnée une matrice $A \in M_n$ (E) (c.a.d un endomorphisme de E^n), on dit que $\lambda \in E$ est valeur propre de A s'il existe $V \in E^n$, $V \neq \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon \end{pmatrix}$

tel que :

$A \otimes V = \lambda \otimes V$

V est appelé *vecteur propre* de A pour la valeur propre λ.

Si l'opération $\otimes$ est commutative, on vérifie aisément que l'ensemble des vecteurs propres de A pour la valeur propre λ, noté $\mho(\lambda)$, est un sous-semi-module de E^n appelé *semi-module propre*. Si l'opération $\otimes$ n'est pas commutative alors $\mho(\lambda)$ est un sous-semi-module *à droite*, c'est-à-dire que, $\forall\ \alpha \in E$, $\beta \in E$, $V \in \mho(\lambda)$ $W \in \mho(\lambda)$: $V \otimes \alpha \oplus W \otimes \beta \in \mho(\lambda)$.

Propriété 2.1

L'opération $\otimes$ étant supposée idempotente et commutative, si V est vecteur propre de A pour la valeur propre e, alors $\lambda \otimes V$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

Démonstration

On a $A \otimes V = V$

d'où :
$$\begin{aligned} A \otimes (\lambda \otimes V) &= \lambda \otimes (A \otimes V) \\ &= \lambda \otimes V \\ &= \lambda^2 \otimes V \\ &= \lambda \otimes (\lambda \otimes V) \qquad \square \end{aligned}$$

Rappelons que le graphe G (A) associé à une matrice $A \in M_n(E)$ est le graphe orienté ayant $X = \{1, 2, \ldots n\}$ comme ensemble de sommets et où (i, j) est un arc si et seulement si $a_{ij} \neq \varepsilon$. Pour tout arc (i, j) de G (A), le coefficient a_{ij} est appelé le *poids* de l'arc (i, j).

Pour $k \in \mathbb{N}$ on notera A^k la puissance $k^{\text{ième}}$ de la matrice A et
$A^{[k]} = A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^k$

Lorsque les matrices $A^{[k]}$ ont une limite, quand $k \to \infty$, on notera A^+ cette limite et $A^* = I \oplus A^+$ (I est la matrice identité de $M_n(E)$). Il est facile de voir que les matrices A^* et A^+ vérifient la relation :

$$A \otimes A^* = A^* \otimes A = A^+ \qquad (1)$$

On rappelle également que le terme (i, i) de A^+ peut s'écrire :

$$[A^+]_{i,\,i} = \sum_{\gamma \in P_{ii}} w(\gamma) \qquad (2)$$

où P_{ii} désigne l'ensemble des circuits de cardinalité ≥ 1 passant par i dans G (A) et w (γ) le poids du circuit $\gamma \in P_{ii}$.

(si $\gamma = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots (i_k, i_1)\}$ alors : $w(\gamma) = a_{i_1,i_2} \otimes a_{i_2,i_3} \otimes \ldots \otimes a_{i_k,\, i_1}$)

Rappelons que, si $\otimes$ n'est pas commutative, le poids d'un circuit dépend du sommet de départ choisi pour le parcourir et il faut faire appel alors à la notion de *circuit pointé*. Dans ce cas, dans la relation (2), P_{ii} désignera l'ensemble des circuits pointés d'origine i.

Désignons par $[A^+]^i$ et $[A^*]^i$ la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice A^+ et de la matrice A^*

respectivement. On peut alors énoncer :

Théorème 1 (Gondran et Minoux 1977)

Si l'on suppose l'existence de la matrice A^* (noter alors que celle de $A^+ = A \otimes A^*$ en découle) alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $$\left(\sum_{\gamma \in P_{ii}} w(\gamma) \right) \otimes \lambda \oplus \lambda = \left(\sum_{\gamma \in P_{ii}} w(\gamma) \right) \otimes \lambda \qquad (3)$$

pour $i \in [1, n]$ et pour une valeur $\lambda \in E$.

(ii) $[A^+]^i \otimes \lambda$ (ainsi que $[A^*]^i \otimes \lambda$) est vecteur propre de A pour la valeur propre e.

Démonstration :

Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii)

D'après (1) on a :

$$\begin{aligned} [A^+]^i &= A \otimes [A^*]^i \\ &= A \otimes ([I]^i \oplus [A^+]^i) \end{aligned}$$

où l'on a noté $[I]^i$ la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice identité I.

La condition (3) permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} [A^*]^i \otimes \lambda &= ([I]^i \oplus [A^+]^i) \otimes \lambda \\ &= [A^+]^i \otimes \lambda \end{aligned}$$

d'où la relation (1) permet de déduire que $[A^+]^i \otimes \lambda = [A^*]^i \otimes \lambda$ est vecteur propre de A pour la valeur propre e.

Montrons maintenant que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Supposons que $[A^*]^i \otimes \lambda$ est vecteur propre de A pour la valeur propre e.

On a donc :

$$\begin{aligned} A \otimes [A^*]^i \otimes \lambda &= [A^*]^i \otimes \lambda \qquad (4) \\ &= ([I]^i \oplus [A^+]^i) \otimes \lambda \end{aligned}$$

Comme $A \otimes A^* = A^+$ on déduit de (4) :

$$[A^*]^i \otimes \lambda = [A^+]^i \otimes \lambda$$

ce qui entraîne alors : $[A^+]^i \otimes \lambda = ([I]^i \oplus [A^+]^i) \otimes \lambda$

Pour la $i^{\text{ème}}$ composante, l'égalité ci-dessus implique :
$[A^+]_{i,i} \otimes \lambda = \lambda \oplus [A^+]_{i,i} \otimes \lambda$
qui n'est autre que l'équation (3). □
Plusieurs résultats intéressants vont découler directement de ce théorème.

Corollaire 2.2
Si A^* existe et s'il existe $\mu \in E$ et un circuit pointé γ de sommet initial i tels que :
$w(\gamma) \otimes \mu \oplus \mu = w(\gamma) \otimes \mu$, alors $[A^*]^i \otimes \mu$ est vecteur propre de A pour la valeur propre e.

Démonstration
Il suffit de remarquer qu'en vertu des hypothèses du corollaire 2.2, la relation (3) est vérifiée. □
Le théorème 1 et le corollaire 2.2 seront souvent utilisés dans le cas particulier $\lambda = e$ ou $\mu = e$.

Corollaire 2.3
Si A^* existe et si $I \oplus A = A$, alors toutes les colonnes de A^* sont vecteurs propres de A pour la valeur propre e.

Démonstration
Elle découle directement du corollaire 2.2 en prenant $\mu = e$ et $w(\gamma) = a_{ii}$. □

Le corollaire 2.4 ci-dessous est une conséquence du théorème 1 dans le cas où $(E, \otimes)$ est un groupe (l'inverse d'un élément $\lambda \in E$ pour $\otimes$ est noté λ^{-1}).

Corollaire 2.4

(i) Si $(E, \otimes)$ est un groupe, si $(\lambda^{-1} \otimes A)^*$ existe et si :

$$\left(\lambda^{-1} \otimes A\right)^*_{i,i} \oplus e = \left(\lambda^{-1} \otimes A\right)^*_{i,i} \qquad (5)$$

alors $[(\lambda^{-1} \otimes A)^*]^i$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

(ii) Si, de plus, $\otimes$ est *commutative*, alors la condition (5) peut être remplacée par :

$$\sum_{\gamma \in P_{ii}} w(\gamma) \otimes (\lambda^{-1})^{|\gamma|} \oplus e = \sum_{\gamma \in P_{ii}} w(\gamma) \otimes (\lambda^{-1})^{|\gamma|} \qquad (6)$$

où $|\gamma|$ dénote le nombre d'arcs du circuit γ et où P_{ii} dénote l'ensemble des circuits de G (A) passant par i.

Démonstration

(i) La relation (5) montre que le théorème 1 s'applique à la matrice $\lambda^{-1} \otimes A$ et que, par suite, $[(\lambda^{-1} \otimes A)^*]^i$ est vecteur propre de $\lambda^{-1} \otimes A$ pour la valeur propre e. On en déduit que ce vecteur est aussi vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

(ii) Dans le cas où $\otimes$ est commutative, le poids d'un circuit γ de G $(\lambda^{-1} \otimes A)$ n'est autre que $w(\gamma) \otimes (\lambda^{-1})^{|\gamma|}$ où $w(\gamma)$ est le poids de ce circuit dans G (A). □

Le résultat suivant concerne un autre cas d'application important, celui où les deux opérations $\oplus$ et $\otimes$ sont idempotentes.

Corollaire 2.5

Supposons que $\oplus$ et $\otimes$ sont idempotentes, que A^+ existe, et définissons $\mu \in E$ par :

$$\mu = [A^+]_{i,\,i} = \sum_{\gamma \in P_{ii}} w(\gamma) \tag{7}$$

Alors $[A^*]^i \otimes \mu$ est vecteur propre de A pour la valeur propre e.

Démonstration

Comme $\oplus$ et $\otimes$ sont idempotentes, on a $\mu^2 \oplus \mu = \mu^2$ et, μ étant défini par (7) on voit que la relation (3) est satisfaite avec $\lambda = \mu$; le résultat découle alors du théorème 1. □

Dans le cas où, en plus de l'idempotente de $\oplus$ et $\otimes$, on suppose la commutativité de $\otimes$, l'existence de A^+ est garantie et on obtient le corollaire suivant

Corollaire 2.6

Si $\oplus$ est idempotente, $\otimes$ idempotente et commutative, alors :

(i) A^+ et A^* existent :

(ii) en posant :

$$\mu = [A^+]_{i,\,i} = \sum_{\gamma \in P_{ii}} w(\gamma)$$

pour tout $\lambda \in E$, $\lambda \otimes \mu \otimes [A^*]^i$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

Démonstration

(i) Dans le cas où $\oplus$ et $\otimes$ sont idempotentes, tout élément $a \in E$ est 1-stable et admet un quasi-inverse $a^* = e \oplus a$. Si, de plus, la loi $\otimes$ est commutative, toute matrice carrée A admet une quasi-inverse A^* : l'existence de A^+ et de A^* est donc garantie.

(ii) En appliquant le corollaire 2.5 on déduit immédiatement que $[A^*]^i \otimes \mu = \mu \otimes [A^*]^i$ est vecteur propre de A pour la valeur propre e. Par suite d'après la Propriété 2.1, $\forall\, \lambda \in E$, $\lambda \otimes \mu \otimes [A^*]^i$ est vecteur propre de A par la valeur propre λ. □

3 - VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DANS LES DIOÏDES IDEMPOTENTS. CARACTÉRISATION DES MODULOÏDES PROPRES

Nous présentons dans ce paragraphe un certain nombre de résultats permettant de caractériser les semi-modules propres $\mathcal{V}(\lambda)$ associés à des valeurs propres λ.

Tous ces résultats seront obtenus en supposant que $\oplus$ est soit *idempotente* soit *sélective*, c'est-à-dire correspondent à des cas où $(E, \oplus, \otimes)$ sont des *dioïdes* (idempotents ou sélectifs). Les semi-modules propres dont il est question dans ce paragraphe sont donc des *moduloïdes*.

Nous commencerons par étudier $\mathcal{V}(e)$. Nous montrerons ensuite comment on peut en déduire des résultats pour $\mathcal{V}(\lambda)$ avec λ quelconque.

Lemme 3.1

Soient $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde idempotent et $A \in M_n(E)$ admettant la valeur propre e, et telle que A^* existe avec $A^* = A^{(p)} = I \oplus A \oplus \ldots \oplus A^p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$.

Alors : $V \in \mathcal{V}(e) \Rightarrow \qquad V = A^* \otimes V$

Démonstration

On peut écrire :

$$\begin{aligned} V &= V \\ A \otimes V &= V \\ A^2 \otimes V &= A \otimes V = V \\ &\ \vdots \\ A^k \otimes V &= A \otimes V = V \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il en résulte que : $(I \oplus A \oplus \ldots \oplus A^k) \otimes V = A^{(k)} \otimes V = V$ et par suite si $A^* = A^{(p)}$ pour $p \in \mathbb{N}$, on en déduit :

$$A^* \otimes V = V. \quad \square$$

Le résultat précédent montre ainsi que, lorsque l'ensemble de référence est un dioïde idempotent (a fortiori un dioïde sélectif), tout vecteur de $\mathcal{V}(e)$ est combinaison linéaire des colonnes de A^*. Cependant, les colonnes de A^* n'appartiennent pas elles-mêmes nécessairement à $\mathcal{V}(e)$ (cf le théorème 1 du § 2 et ses corollaires).

Avec l'hypothèse, plus forte, de sélectivité de $\oplus$, nous allons montrer que l'ensemble des vecteurs de la forme $[A^*]^i \otimes \mu_i$ qui appartiennent à $\mathcal{V}(e)$ forment une ensemble générateur de $\mathcal{V}(e)$.

Théorème 2 (Gondran et Minoux 1977)
Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde *sélectif* et $A \in M_n(E)$ admettant la valeur propre e et telle que A^* existe avec $A^* = A^{(p)}$, pour un entier $p \in \mathbb{N}$.
Alors il existe $K \in [1, n]$ et des coefficients $\mu_{i_k} \in E$ (k = 1 … K) tels que

$$V \in \mathcal{V}(e) \Rightarrow \qquad V = \sum_{k=1}^{K} [A^*]^{i_k} \otimes \mu_{i_k}$$

avec, $\forall k : [A^*]^{i_k} \otimes \mu_{i_k} \in \mathcal{V}(e)$

Démonstration
$\oplus$ est idempotente, on a donc $V = A^* \otimes V$ d'après le lemme 3.1 et par suite :

$$V = \sum_{i=1}^{n} [A^*]^i \otimes V_i \tag{8}$$

Par ailleurs, puisque $V \in \mathcal{V}(e)$:

$$\forall \ i = 1, \ldots n : \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes V_j = V_i$$

Comme $\oplus$ est sélective, à chaque indice $i \in \{1, \ldots n\}$ on peut faire correspondre un indice $j = \varphi(i)$ tel que : $a_{i,\varphi(i)} \otimes V\varphi(i) = V_i$ (s'il existe plusieurs indices j tels que $a_{ij} \otimes V_j = V_i$, on choisit arbitrairement un de ces indices pour $\varphi(i)$).

Le graphe partiel H de G (A) formé par le sous-ensemble des arcs de la forme $(i, \varphi(i))$ pour i = 1, … n, comporte n sommets et n arcs. Son nombre cyclomatique est donc égal à son nombre de connexité. Par ailleurs, comme tout sommet de H a un demi-degré extérieur exactement égal à 1, chaque composante connexe de H contient un circuit et un seul. Notons H^1, H^2, ... H^K les composantes connexes de H, et, pour $k \in \{1, \dots K\}$, notons γ^k le circuit contenu dans H^k. Tout sommet $i \in H^k$ soit appartient à γ^k soit est relié à γ^k par un unique chemin d'origine i et d'extrémité $j \in \gamma^k$.

Supposons que $\gamma^k = \{i_1, i_2, \dots i_q\}$

On a :

$$\begin{aligned} a_{i_1 i_2} \otimes V_{i_2} &= V_{i_1} \\ a_{i_2 i_3} \otimes V_{i_3} &= V_{i_2} \\ &\vdots \\ a_{i_q i_1} \otimes V_{i_1} &= V_{i_q} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, pour un sommet i quelconque de γ^k (par exemple $i = i_1$) :

$$w(\gamma^k) \otimes V_i = V_i$$

On peut donc écrire :

$$w(\gamma^k) \otimes V_i \oplus V_i = V_i = w(\gamma^k) \otimes V_i$$

On remarque alors que, de ce fait, les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées avec $\lambda = V_i$, ce qui implique :

$$[A^*]^i \otimes V_i \in \mathcal{V}(e)$$

Considérons maintenant un sommet j quelconque de H^k et montrons que, dans la somme (8), le terme $[A^*]^j \otimes V_j$ est absorbé par le terme $[A^*]^i \otimes V_i$.

Dans H^k il existe un chemin unique π_{ji} joignant j à i. Sur chaque arc (s, t) de ce chemin on a la relation :

$$a_{st} \otimes V_t = V_s$$

d'où l'on déduit :

$$w(\pi_{ji}) \otimes V_i = V_j$$

On peut donc écrire :

$[A^*]^j \otimes V_j \oplus [A^*]^i \otimes V_i = [[A^*]^j \otimes w(\pi_{ji}) \oplus [A^*]^i] \otimes V_i$

$w(\pi_{ji})$ intervient dans le terme (j, i) de la matrice A^r, où r est le nombre d'arcs du chemin π_{ji}. De la propriété élémentaire : $A^* \oplus A^* \otimes A^r = A^*$ (qui découle de l'idempotence de $\oplus$) on déduit que :

$[[A^*]^j \otimes w(\pi_{ji}) \oplus [A^*]^i = [A^*]^i$

ce qui montre que :
$[A^*]^i \otimes V_i \oplus [A^*]^j \otimes V_j = [A^*]^i \otimes V_i$
Il résulte de ce qui précède qu'il suffit dans la somme (8) de retenir un seul terme de la forme $[A^*]^{i_k} \otimes V_{i_k}$, avec $i_k \in \gamma^k$ pour chaque composante connexe H^k de H, et l'on a :

$$V = \sum_{k=1}^{K} [A^*]^{i_k} \otimes V_{i_k}$$

et $[A^*]^{i_k} \otimes V_{i_k} \in \mathcal{V}(e)$ pour k = 1... K,
ce qui démontre le théorème. □

On peut déduire du théorème 2 les conséquences suivantes.

Corollaire 3.2
Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde sélectif-groupe et $A \in M_n(E)$ telle que A^* existe avec $A^* = A^{(p)}$ $(p \in \mathbb{N})$
Alors, si e est valeur propre de A, $\mathcal{V}(e)$ est le moduloïde (à droite) engendré par les colonnes de A^*, elles-mêmes vecteurs propres de A pour e.

Démonstration
D'après le Théorème 2, si $V \in \mathcal{V}(e)$, alors V est de la forme :

$$V = \sum [A^*]^k \otimes \mu_k$$

avec, $\forall$ k, $[A^*]^k \otimes \mu_k \in \mathcal{V}(e)$ (sommation sur un sous-ensemble d'indices de {1, 2, …, n}).

Puisque $(E, \otimes)$ est un groupe, $\mu_k \neq \varepsilon$ a un inverse pour $\otimes$ et :
$A \otimes [A^*]^k \otimes \mu_k = [A^*]^k \otimes \mu_k$ montre (en multipliant à droite par $(\mu_k)^{-1}$) que l'on a aussi $[A^*]^k \in \mathcal{V}(e)$
On en déduit le corollaire 3.2. □

Dans le corollaire 3.3 e tle théorème 3 qui vont suivre, on fera l'hypothèse que $\oplus$ est sélective, que $\otimes$ est idempotente et que e est le plus grand élément de E. Alors, on sait que l'ensemble E est totalement ordonné par la relation d'ordre canonique et il est facile de voir que :

$$\forall a \in E, b \in E, a \otimes b = \text{Min}\{a, b\} \qquad (9)$$

En effet, on a :
$a \otimes b \oplus a = a \otimes (b \oplus e) = a$
$a \otimes b \oplus b = (a \oplus e) \otimes b = b$

Ce qui implique $a \otimes b \leq a$ et $a \otimes b \leq b$
Si maintenant on suppose $a \geq b$, on a :
$a \oplus b = a$ et on peut écrire :
$a \otimes b = (a \oplus b) \otimes b = a \otimes b \oplus b$
d'où l'on déduit $a \otimes b \geq b$ et (par l'antisymétrie de $\geq$) $a \otimes b = b$. De même : $a \leq b \Rightarrow a \otimes b = a$.

Corollaire 3.3
Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde sélectif pour lequel :
- la loi $\otimes$ est idempotente ;
- e est le plus grand élément (c.a.d. : $\forall\, a \in E, e \oplus a = e$)

Soit $A \in M_n(E)$ admettant e pour valeur propre. Alors A^* existe et $\mathcal{V}(e)$ est le moduloïde (à droite) engendré par l'ensemble des vecteurs de la forme $[A^+]^i \otimes \mu_i$ (pour i = 1... n) où, $\forall$ i : $\mu_i = \sum\limits_{\gamma \in P_{ii}} w(\gamma) = [A^+]_{i,i}$

Démonstration
En vertu des hypothèses, on a pour tout circuit pointé γ de G(A) :
$w(\gamma) \oplus e = e$
ce qui montre que G(A) est sans circuit 0-absorbant.
On en déduit l'existence de A^* (noter qu'ici on ne suppose pas la commutativité de $\otimes$).
De plus, $A^* = A^{(n-1)}$.
D'après le corollaire 2.5, les vecteurs $[A]^i \otimes \mu_i$ (avec $\mu_i = [A^+]_{i,i}$) sont éléments de $\mathcal{V}(e)$.

Appliquons maintenant le *théorème 2* : tout vecteur $V \in \mathcal{V}(e)$ peut s'écrire :
$V = \sum [A^*]^k \otimes \alpha_k$ (10)
avec $[A^*]^k \otimes \alpha_k \in \mathcal{V}(e)$.
(Somme sur un sous-ensemble d'indices de {1, 2, …, n}).
D'après le théorème 1, α_k vérifie l'équation (3) c'est-à-dire :

$$\mu_k \otimes \alpha_k \oplus \alpha_k = \mu_k \otimes \alpha_k$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \mu_k \otimes \alpha_k \oplus \alpha_k &= (\mu_k \oplus e) \otimes \alpha_k \\ &= \alpha_k \quad (\text{car } \mu_k \oplus e = e) \end{aligned}$$

Par suite, on a : $\mu_k \otimes \alpha_k = \alpha_k$ et (10) peut se réécrire :

$$V = \sum ([A^*]^k \otimes \mu_k) \otimes \alpha_k$$

Ceci montre que l'ensemble des vecteurs de la forme $[A^*]^i \otimes \mu_i$ $(i = 1, \dots n)$ est un générateur de $\mathcal{V}(e)$. □

D'après le corollaire 3.3, l'ensemble des vecteurs de la forme $[A^*]^i \otimes [A^+]_{i,i}$ est un ensemble générateur de $\mathcal{V}(e)$. Le résultat suivant est fondamental, car, sous les mêmes hypothèses, il montre qu'il s'agit d'un ensemble générateur *minimal*, et qu'un tel ensemble est *unique*.

Théorème 3

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde sélectif pour lequel la loi $\otimes$ est idempotente et où e est le plus grand élément. Soit $A \in M_n(E)$ admettant e pour valeur propre.

Alors A^* existe et $G = \bigcup\limits_{i=1\dots n} \left\{\overline{V}^i\right\}$, l'ensemble des vecteurs distincts de la forme $\overline{V}^i = [A^*]^i \otimes [A^+]_{i,i}$ (pour i = 1,... n), est l'unique *ensemble générateur minimal* de $\mathcal{V}(e)$.

Démonstration

L'existence de A^* et le fait que les $\overline{V}^i$ forment un ensemble générateur de $\mathcal{V}(e)$ découlent du Corollaire 3.3.

Montrons donc que G est un générateur minimal et qu'il est unique. Raisonnons par contradiction et supposons qu'il existe un autre générateur minimal $G' = \bigcup\limits_{k \in K} \left\{W^k\right\}$ de $\mathcal{V}(e)$ composé des vecteurs W^k, k parcourant un ensemble fini d'indices K. Certains vecteurs $\overline{V}^i$ peuvent coïncider avec des vecteurs de G', mais il existe nécessairement au moins un indice i tel que : $\overline{V}^i \neq W^k$ pour tout $k \in K$. Comme G' est un ensemble générateur de $\mathcal{V}(e)$, il existe des coefficients $\gamma_k \in E$ tels que :

$$\overline{V}^i = \sum_{k \in K} W^k \otimes \gamma_k \qquad (11)$$

La composante i de $\overline{V}^i$ est $\left[A^+\right]_{i,i}$

(En effet, on a :

$$\left[A^*\right]_{i,i} \otimes \left[A^+\right]_{i,i} = \left(e \oplus \left[A^+\right]_{i,i}\right) \otimes \left[A^+\right]_{i,i} = \left[A^+\right]_{i,i}$$

puisque e est le plus grand élément de E).

Comme $\oplus$ est idempotente, il existe un indice k' $\in$ K tel que :

$\overline{V}^i_i = [A^+]_{i,i} = W^{k'}_i \otimes \gamma_{k'}$ (12)

Comme $W^{k'} \in \mathcal{V}$ (e), d'après le lemme 3.1, il peut se mettre sous la forme :

$$W^{k'} = \sum_{j=1}^{n} [A^*]^j \otimes W^{k'}_j$$

d'où l'on déduit :

$W^{k'} \geq [A^*]^i \otimes W^{k'}_i$

Comme, d'après (12), $W^{k'}_i \geq [A^+]_{i,i}$,

on en déduit :

$W^{k'} \geq [A^*]^i \otimes [A^+]_{i,i} = \overline{V}^i$ (13)

La relation (11) permet d'autre part d'écrire :

$\overline{V}^i \geq W^{k'} \otimes \gamma_{k'}$

puis, en remarquant que (d'après (12)) $\gamma_{k'} \geq [A^+]_{i,i}$:

$\overline{V}^i \geq W^{k'} \otimes [A^+]_{i,i}$ (14)

En multipliant maintenant (13) par $[A^+]_{i,i}$ et en remarquant que, du fait de l'idempotence de $\otimes$:

$\overline{V}^i \otimes [A^+]_{i,i} = \overline{V}^i$

on obtient :

$W^{k'} \otimes [A^+]_{i,i} \geq \overline{V}^i$ (15)

Les inégalités (14) et (15) impliquent alors :

$\overline{V}^i = W^{k'} \otimes [A^+]_{i,i}$ (16)

Le raisonnement précédent montre que, pour tout vecteur $\overline{V}^i$ ne coïncidant pas avec un des vecteurs W^k, il existe un indice k' $\in$ K tels que les vecteurs $\overline{V}^i$ et $W^{k'}$ vérifient (16) (c'est-à-dire sont "colinéaires").

De plus, l'ensemble des W^k (k $\in$ K) ayant été supposé minimal, il ne peut contenir de vecteur W^t (t $\in$ K) qui ne corresponde à un des $\overline{V}^i$ (en effet, dans ce cas, un générateur strictement plus petit au sens de la relation d'inclusion serait obtenu en éliminant le vecteur W^t).

On en déduit donc que les ensembles G et G' sont en bijection. Pour tout $k \in K$, notons $\alpha(k) = i$, l'indice du vecteur $\overline{V}$ correspondant à W^k. On a donc, $\forall\, k \in K$:
$W^k = \overline{V}^{\alpha(k)}$ ou $W^k \otimes \left[A^+\right]_{\alpha(k),\, \alpha(k)} = \overline{V}^{\alpha(k)}$.

Dans tous les cas, on a donc :
$W^k \geq \overline{V}^{\alpha(k)}$ pour tout k.
Ceci montre que, parmi tous les générateurs minimaux (au sens de l'inclusion) en bijection avec $G = \bigcup\limits_{i=1\ldots n} \left\{\overline{V}^i\right\}$, G est celui qui contient les plus petits vecteurs (au sens de la relation d'ordre sur les vecteurs de E^n). G est donc l'unique générateur minimal avec cette propriété. □

Notons que le théorème 3 ci-dessus généralise un résultat de GONDRAN (1976) établi dans le cas particulier du dioïde ($\mathbb{R}$, Min, Max).
Les résultats suivants vont nous permettre de caractériser $\mathcal{V}(\lambda)$ pour $\lambda \neq e$ dans le cas de dioïdes sélectifs à multiplication idempotente.

Lemme 3.4

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde avec $\otimes$ commutative et e plus grand élément de E ($\forall\, a \in E : e \oplus a = e$). Soit $A \in M_n(E)$.
Alors A* existe, et si $\lambda \in E$ est valeur propre de A :
$V \in \mathcal{V}(\lambda) \Rightarrow V = A^* \otimes V$

Démonstration

En utilisant la commutativité de $\otimes$, $A \otimes V = \lambda \otimes V$ entraîne, $\forall\, k \in \mathbb{N}$:

$$A^k \otimes V = \lambda^k \otimes V$$

Comme e est le plus grand élément de E, on a : $e \oplus \lambda \oplus \lambda^2 \oplus \ldots \oplus \lambda^k = e$
d'où, $\forall$ k :
$(I \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^k) \otimes V = V$

Comme $A^{(k)} = A^*$ dès que $k \geq n - 1$ on en déduit le résultat. □

On peut alors établir le :

Corollaire 3.5 (Gondran et Minoux 1977)

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde sélectif pour lequel :
- la loi $\otimes$ est idempotente et commutative ;
- e est le plus grand élément (c.a.d., $\forall$ a $\in$ E : $e \oplus a = e$)

Soit $A \in M_n(E)$. Alors :

(i) A^* existe et tout $\lambda \in E$ est valeur propre de A ;

(ii) $V \in \mathcal{V}(\lambda) \Rightarrow V = \sum_{k=1}^{K} [A^*]^{i_k} \otimes \lambda \otimes \mu_{i_k}$

avec $K \le n$ et $\forall$ k : $[A^*]^{i_k} \otimes \lambda \otimes \mu_{i_k} \in \mathcal{V}(\lambda)$
avec $\mu_{i_k} = [A^+]_{i_k, i_k}$

Démonstration
(i) découle directement du corollaire 3.3. Démontrons donc (ii).
Les hypothèses du Lemme 6 étant vérifiées, on a : $V = A^* \otimes V = \sum_{i=1}^{n} [A^*]^i \otimes v_i$

Par ailleurs, on a :

$$\forall\ i = 1, \ldots n : \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes V_j = \lambda \otimes V_i$$

Comme dans la démonstration du Théorème 2, on peut construire le graphe partiel H de G(A) dont les arcs sont de la forme (i, φ (i)) où, $\forall$ i = 1, … n :

$$a_{i, \varphi(i)} \otimes V_{\varphi(i)} = \lambda \otimes V_i \qquad (13)$$

Chaque composante connexe H^k contient un circuit γ^k. En écrivant les relations (13) le long du circuit γ^k, et en tenant compte du fait que $\otimes$ est idempotente, on obtient pour $i \in \gamma^k$:
$w(\gamma^k) \otimes V_i = \lambda \otimes V_i$

Ceci permet d'écrire :
$w(\gamma^k) \otimes \lambda \otimes V_i \oplus \lambda \otimes V_i = w(\gamma^k) \otimes \lambda \otimes V_i$
d'où l'on déduit, d'après le corollaire 1, que : $[A^*]^i \otimes \lambda \otimes V_i \in \mathcal{V}(e)$

On remarque alors que l'on a également $[A^*]^i \otimes \lambda \otimes V_i \in \mathcal{V}(\lambda)$ (en effet, $\otimes$ étant idempotente et commutative, $A \otimes U = U$ entraîne : $A \otimes (\lambda \otimes U) = \lambda \otimes A \otimes U = \lambda \otimes U = \lambda^2 \otimes U$, ce qui montre que $U \in \mathcal{V}(e) \Rightarrow \lambda \otimes U \in \mathcal{V}(\lambda)$.

Comme dans la démonstration du *Théorème 2* on montre également que tout terme de la forme $[A^*]^j \otimes \lambda \otimes V_j$ $(j \neq i, j \in H^k)$ est absorbé par $[A^*]^i \otimes \lambda \otimes V_i$.

En choisissant alors un sommet $i_k \in \gamma^k$ dans chaque composante connexe H^k de H on peut écrire, en notant K le nombre de connexités de H :

$$V = \sum_{k=1}^{K} [A^*]^{i_k} \otimes \lambda \otimes V_{i_k}$$

avec, $\forall$ k, $[A^*]^{i_k} \otimes \lambda \otimes V_{i_k} \in \mathcal{V}(\lambda)$

ce qui démontre (ii). □

4 - VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES DANS LES DIOÏDES A STRUCTURE DE GROUPES MULTIPLICATIFS

On étudie dans ce paragraphe le cas particulier, important pour les applications, des dioïdes $(E, \oplus, \otimes)$ pour lesquels $(E, \otimes)$ est un *groupe*.
Pour des matrices à coefficients dans de tels dioïdes, nous verrons que l'on retrouve ainsi des propriétés bien connues de matrices irréductibles à coefficients positifs dans l'algèbre ordinaire. Nous utiliserons ensuite ces propriétés pour établir un analogue du classique théorème de PERRON-FROBENIUS pour des matrices à coefficients dans certains dioïdes *sélectifs-groupes*.

On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R}^+)$ est dite *irréductible* si et seulement si le graphe associé G (A) est *fortement connexe*. En algèbre linéaire classique, le théorème de PERRON-FROBENIUS s'énonce :

Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{R}^+)$ une matrice irréductible et $\rho(A)$ son rayon spectral (le module de la valeur propre de plus grand module). Alors $\rho(A)$ est valeur propre de A, et l'espace propre associé est engendré par un vecteur propre à composantes toutes strictement positives.

Dans le cas des dioïdes à structure de groupes multiplicatifs nous commencerons dans le § 4.1 par établir quelques résultats préliminaires.

4-1 VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES : PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Lemme 4.1.1

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde. Alors :

$$a \oplus b = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a = b = \varepsilon \qquad (14)$$

Si de plus, $(E, \otimes)$ est un groupe, alors :

$$a \otimes b = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad a = \varepsilon \text{ ou } b = \varepsilon \qquad (15)$$

Démonstration

Supposons que $a \otimes b = \varepsilon$.

Montrons que $a \neq \varepsilon$ et $b \neq \varepsilon$ est impossible. Si $a \neq \varepsilon$, alors a^{-1}, inverse de a pour $\otimes$ existe, et on en déduit $b = a^{-1} \otimes \varepsilon = \varepsilon$ (à cause de la propriété d'absorption) ce qui constitue une contradiction. On en déduit (15). □

Lemme 4.1.2 (Gondran et Minoux 1977)

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde tel que $(E, \otimes)$ est un groupe, et $A \in M_n(E)$ une matrice irréductible (G (A) fortement connexe) Alors, si $V = (V_i)_{i = 1 \ldots n}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ on a :

$$\lambda > \varepsilon \qquad (16)$$

et :

$$\forall \ i = 1, \ldots n : \quad V_i > \varepsilon \qquad (17)$$

Démonstration

Démontrons d'abord (16). On a nécessairement $\varepsilon \leq \lambda$ (ε est le plus petit élément au sens de la relation d'ordre). Si $\lambda = \varepsilon$ alors on a :

$$A \otimes V = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ : \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

donc, $\forall$ i = 1... n :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes V_j = \varepsilon$$

D'après le Lemme 4.1.1, ceci implique :

$\forall$ i, $\forall$ j : $\quad a_{ij} \otimes V_j = \varepsilon$

et encore :

$a_{ij} = \varepsilon \qquad$ ou $\qquad V_j = \varepsilon.$

Comme V est vecteur propre, $V \neq \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ : \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ il existe donc j_o tel que $V_{j_o} \neq \varepsilon$.

Alors la relation $a_{ij_o} \otimes V_{j_o} = \varepsilon$ implique $a_{ij_o} = \varepsilon$, et ce, pour tout i. Il en résulte une contradiction avec la forte connexité de G (A). Par la suite, on ne peut avoir $\lambda = \varepsilon$, et (16) est démontré.

Pour démontrer (17) raisonnons encore par contradiction. Supposons que V ait des composantes $V_j = \varepsilon$. L'ensemble X = {1, 2, ... n } peut alors être partitionné en :

$X_1 = \{j \,/\, V_j = \varepsilon\}$ et $X_2 = X \setminus X_1$ et l'on a $X_1 \neq \emptyset \qquad X_2 \neq \emptyset$.

En réordonnant au besoin les lignes et les colonnes de A et les composantes de V, on peut mettre V sous la forme $\quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$

(où V_1 correspond aux composantes de V égales à ε et V_2 aux composantes de V différentes de ε) et A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

où $\forall\, l \in \{1, 2\}$ et $\forall\, k \in \{1, 2\}$ A_{lk} est la sous-matrice induite par le sous ensemble de lignes X_l et le sous-ensemble de colonnes X_k. La relation $A \otimes V = \lambda \otimes V$ entraîne alors

$$A_{12} \otimes V_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

V_2 ayant toutes ses composantes $\neq \varepsilon$, on en déduit, par un raisonnement analogue au précédent, que la sous-matrice A_{12} a tous ses termes égaux à ε. Ceci contredit l'irréductibilité de la matrice A, et démontre (17). □

Ce résultat va maintenant être utilisé pour étudier les propriétés des valeurs propres de matrices à coefficients dans des dioïdes à structure de groupes multiplicatifs.

Lemme 4.1.3 (Gondran et Minoux 1977)

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde où $(E, \otimes)$ est un groupe commutatif, $A \in M_n(E)$ irréductible et $\lambda \in E$ une valeur propre de A. Alors :

(i) Pour tout circuit γ de G (A) on a :
$$w(\gamma) \leq \lambda^{|\gamma|} \qquad (18)$$
(où $|\gamma|$ dénote la cardinalité du circuit γ).

(ii) Si $\oplus$ est sélective, il existe un circuit élémentaire γ de G(A) tel que :
$$w(\gamma) = \lambda^{|\gamma|} \qquad (19)$$

(iii) Si $\oplus$ est idempotente, la matrice $(\lambda^{-1} \otimes A)^*$ existe.

Démonstration

(i) Considérons un circuit quelconque $\gamma = \{i_1, i_2, \dots i_k, i_1\}$ de G (A) où $|\gamma| = k$. Si $V = (V_j)_{j = 1 \dots n}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, on a :

$$\sum_j a_{i_1 j} \otimes V_j = \lambda \otimes V_{i_1}$$

$$\sum_j a_{i_2 j} \otimes V_j = \lambda \otimes V_{i_2}$$

$$\vdots$$

$$\sum_j a_{i_k j} \otimes V_j = \lambda \otimes V_{i_k}$$

Ceci implique :

$$\left.\begin{array}{l} a_{i_1\, i_2} \otimes V_{i_2} \leq \lambda \otimes V_{i_1} \\ a_{i_2\, i_3} \otimes V_{i_3} \leq \lambda \otimes V_{i_2} \\ \\ a_{i_k\, i_1} \otimes V_{i_1} \leq \lambda \otimes V_{i_k} \end{array}\right\} \qquad (20)$$

En multipliant par λ la première inégalité (et en utilisant la compatibilité de $\leq$ pour $\otimes$) on obtient :

$a_{i_1\, i_2} \otimes a_{i_2\, i_3} \otimes V_{i_3} \leq a_{i_1\, i_2} \otimes \lambda \otimes V_{i_2} \leq \lambda^2 \otimes V_{i_1}$

De même, en multipliant par λ cette dernière inégalité et en utilisant la relation : $a_{i_3\, i_4} \otimes V_{i_4} \leq \lambda \otimes V_{i_3}$ on obtient :

$a_{i_1\, i_2} \otimes a_{i_2\, i_3} \otimes a_{i_3\, i_4} \otimes V_{i_4} \leq \lambda^3 \otimes V_{i_1}$

et en itérant k fois ce processus :

$$a_{i_1\, i_2} \otimes \ldots \otimes a_{i_k\, i_1} \otimes V_{i_1} \leq \lambda^{|\gamma|} \otimes V_{i_1} \qquad (21)$$

Comme A est irréductible on a $\lambda \neq \varepsilon$ et $V_j \neq \varepsilon$ (j = 1... n) (cf. lemme 4.1.2) donc $V_{i_1} \neq \varepsilon$. Alors en multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $\left(V_{i_1}\right)^{-1}$ on obtient :

$a_{i_1\, i_2} \otimes a_{i_2\, i_3} \otimes \ldots \otimes a_{i_k\, i_1} \leq \lambda^{|\gamma|}$

ce qui démontre (18).

(ii) Si $V = (V_j)_{j = 1 \ldots n}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ, on a, $\forall i = 1 \ldots n$:

$$\sum_j a_{ij} \otimes V_j = \lambda \otimes V_i$$

Comme $\oplus$ est supposée sélective, à chaque indice $i \in \{1, \ldots n\}$ on peut associer un indice $\varphi(i)$ tel que :

$a_{i,\varphi(i)} \otimes V_{\varphi(i)} = \lambda \otimes V_i$

(s'il existe plusieurs indices j tels que $a_{i,j} \otimes V_j = \lambda \otimes V_i$ on choisit arbitrairement un de ces indices pour φ (i))

Le graphe partiel H de G (A) formé par le sous-ensemble des arcs de la forme (i, φ (i)) comporte n sommets et n arcs. Dans H, chaque sommet a un demi-degré extérieur égal à 1, il existe donc un circuit *élémentaire* γ. Le long de ce circuit, les relations (20) sont vérifiées *avec l'égalité*, et la relation (21) s'écrit :

$w(\gamma) \otimes V_{i_1} = \lambda^{|\gamma|} \otimes V_{i_1}$

Comme V_{i_1} est inversible ($V_{i_1} \neq \varepsilon$ en vertu du lemme 4.1.2) on en déduit la relation (19). □

(iii) L'existence de $(\lambda^{-1} \otimes A)^*$ découle directement de (18). En effet, soit γ un circuit quelconque de G (A). Son poids relativement à $\lambda^{-1} \otimes A$ est :
$\theta(\gamma) = w(\gamma) \otimes (\lambda^{-1})^{|\gamma|}$
(18) implique alors que $\theta(\gamma) \leq e$ et, par suite, pour tout circuit γ de G (A) on a :
$\theta(\gamma) \oplus e \leq e \oplus e = e$. Comme $\theta(\gamma) \oplus e \geq e$ on en déduit $\theta(\gamma) \oplus e = e$
ce qui montre que $\theta(\gamma)$ est *0-absorbant*. L'existence de $(\lambda^{-1} \otimes A)^*$ s'en déduit. □

Du lemme 9 précédent on peut alors déduire :

Corollaire 4.1.4

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde sélectif-groupe avec $\otimes$ commutative, et $A \in M_n(E)$ irréductible. Alors si A admet une valeur propre λ, celle-ci est unique.

Démonstration
Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de A.

D'après le lemme 4.1.3 il existe deux circuits élémentaires γ_1 et γ_2 de G (A) tels que :

$$w(\gamma_1) = \lambda_1^{|\gamma_1|}$$
$$w(\gamma_2) = \lambda_2^{|\gamma_2|}$$

Par ailleurs, toujours d'après le lemme 4.1.3 on peut écrire :

$$w(\gamma_2) \leq \lambda_1^{|\gamma_2|}$$

et

$$w(\gamma_1) \leq \lambda_2^{|\gamma_1|}$$

On en déduit :

$$\lambda_1^{|\gamma_1|} \leq \lambda_2^{|\gamma_1|} \qquad (22)$$

et :

$$\lambda_2^{|\gamma_2|} \leq \lambda_1^{|\gamma_2|} \qquad (23)$$

Comme $\oplus$ est sélective, $\leq$ est une relation d'ordre total, donc si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on a, soit $\lambda_1 < \lambda_2$ soit $\lambda_2 < \lambda_1$.

Si l'on a, par exemple, $\lambda_1 < \lambda_2$ alors on peut en déduire :

$$\lambda_1^{|\gamma_2|} < \lambda_2^{|\gamma_2|}$$

qui est incompatible avec (23).

De façon analogue, si $\lambda_2 < \lambda_1$ il vient :

$$\lambda_2^{|\gamma_1|} < \lambda_1^{|\gamma_1|}$$

qui est incompatible avec (22).
$\lambda_2 \neq \lambda_1$ aboutit donc à une contradiction, ce qui démontre la propriété. □

Pour une matrice A à coefficients dans un dioïde sélectif-groupe et ayant une unique valeur propre λ, le résultat suivant caractérise les générateurs minimaux du moduloïde propre $\mathcal{V}(\lambda)$.

Théorème 4

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde sélectif-groupe avec $\otimes$ commutative, et $A \in M_n(E)$ une matrice irréductible admettant λ comme (unique) valeur propre. Notons $G_c(A)$ (graphe critique) le sous-graphe partiel de G(A) induit par l'ensemble des sommets et des arcs appartenant à au moins un circuit γ de poids $w(\gamma) = \lambda^{|\gamma|}$ (circuit critique). Soient $H_1, H_2, \ldots H_p$ les composantes fortement connexes de $G_c(A)$ et choisissons dans chaque composante un sommet particulier soit $j_1 \in H_1, j_2 \in H_2, \ldots j_p \in H_p$. Alors la famille de vecteurs $F = \{[A^*]^{j_1}, [A^*]^{j_2}, \ldots [A^*]^{j_p}\}$ est un générateur minimal du moduloïde propre $\mathcal{V}(\lambda)$.

Démonstration :

Nous donnons la démonstration pour le cas $\lambda = e$. Le cas général d'une matrice A admettant une valeur propre $\lambda \in E$, $\lambda \neq e$, s'en déduit aisément en considérant la matrice $A' = (\lambda^{-1}) \otimes A$. Remarquons également que, d'après le lemme 4.1.3, il existe au moins un circuit critique, donc G_c admet au moins une composante fortement connexe non vide.

(a) Montrons d'abord que F est un générateur de $\mathcal{V}(e)$.
Notons γ_1 un circuit critique de H_1 passant par j_1, γ_2 un circuit critique de H_2 passant par j_2, etc.
Soit $V = (V_j)_{j = 1 \ldots n}$, un vecteur propre associé à la valeur propre e.
Notons que, A étant irréductible, d'après le lemme 4.1.2 : $\forall\, j = 1, \ldots n \;\; V_j > \varepsilon$.
En utilisant la démonstration du lemme 4.1.3 on a, le long de chacun des circuits $\gamma_1, \ldots \gamma_p$:

$$\begin{cases} a_{i_1\ i_2} \otimes V_{i_2} \leq V_{i_1} \\ a_{i_2\ i_3} \otimes V_{i_3} \leq V_{i_2} \\ \qquad \vdots \\ a_{i_k\ i_1} \otimes V_{i_1} \leq V_{i_k} \end{cases} \tag{24}$$

(i_1, i_2, … i_k, i_1 désignant la succession des sommets rencontrés le long du circuit). Si l'on avait l'inégalité stricte dans au moins une des relations ci-dessus, ceci impliquerait :

$a_{i_1\ i_2} \otimes a_{i_2\ i_3} \otimes \ldots \otimes a_{i_k\ i_1} \neq e$

d'où il résulterait une contradiction avec le fait que les circuits $\gamma_1\ \gamma_2 \ldots \gamma_p$ sont critiques ($w(\gamma_1) = w(\gamma_2) = \ldots w(\gamma p) = e$).

Pour chacun des circuits $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$, les relations (24) sont donc toutes des égalités.

En utilisant alors la démonstration du Théorème 2 on déduit tout d'abord :

$[A^*]^{j1} \otimes V_{j_1} \in \mathcal{V}(e)$

$[A^*]^{j2} \otimes V_{j_2} \in \mathcal{V}(e)$

:

:

$[A^*]^{jp} \otimes V_{j_p} \in \mathcal{V}(e)$

et, comme (E, $\otimes$) est un groupe et que chacune des composantes de V est distincte de ε, ceci entraîne :

$[A^*]^{j1} \in \mathcal{V}(e)$, $[A^*]^{j2} \in \mathcal{V}(e) \ldots [A^*]^{jp} \in \mathcal{V}(e)$.

D'autre part, toujours d'après la démonstration du théorème 2, on sait que la relation (8) est vérifiée et que, dans la somme $\sum_{i=1}^{n} \left[A^*\right]^i \otimes V_i$, il suffit de retenir un seul terme de la forme $[A^*]^{jk} \otimes V_{jk}$ pour chaque circuit γ_k (k = 1, …, p).

On en déduit que $V \in \mathcal{V}(e)$ peut s'exprimer comme la somme :

$$V = \sum_{k=1}^{p} \left[A^*\right]^{j_k} \otimes V_{j_k}$$

ce qui démontre que F est un générateur de $\mathcal{V}(e)$.

(b) Vérifions maintenant que F est un générateur minimal de $\mathcal{V}(e)$.

Pour cela nous montrerons que pour tout $\alpha \in [1, \ldots p]$, aucun des vecteurs $[A^*]^i$, $i \in H_\alpha$, ne peut être exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs $[A^*]^j$ avec $j \in H_q$, $q \neq \alpha$.

Raisonnons par contradiction et supposons que $[A^*]^i$, $i \in H_\alpha$ soit combinaison linéaire d'autres colonnes de A^* prises dans des composantes fortement connexes toutes différentes et différentes de H_α, et notons $K \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des indices de ces colonnes.

Considérons alors la sous-matrice B déduite de A^* en éliminant toutes les lignes et les colonnes dont les indices n'appartiennent pas à $K \cup \{i\}$.

Il est clair que, par construction, la sous-matrice B a ses colonnes *linéairement dépendantes*, donc :

$$\det{}^+ (B) = \det{}^- (B) \qquad (25)$$

Par ailleurs, chaque terme diagonal de B correspond à un terme diagonal $[A^*]_{j,j}$ où j est un sommet du graphe critique $G_c(A)$. Par suite $[A^*]_{j,j}$ (le poids du circuit de poids maximum passant par j) est égal à e et $[A^*]_{j,j} = e \oplus [A^*]_{j,j} = e$.

Il en résulte que B a tous ses termes diagonaux égaux à e et $\det^+ (B) = e$.

De la relation (25) on déduit alors l'existence d'une permutation impaire des indices de $K \cup \{i\}$ dont le poids est égal à e. La décomposition en circuits de cette permutation impaire permet alors d'exhiber au moins un circuit élémentaire (non réduit à une boucle) et de poids e dans G (B). Ce circuit correspondrait à un circuit critique (de poids e) dans G (A) joignant des sommets appartenant à des composantes fortement connexes différentes du graphe critique. On aboutit ainsi à une contradiction, ce qui démontre le théorème. □

Nous allons maintenant utiliser les propriétés précédentes pour établir un analogue du théorème de PERRON-FROBENIUS dans certains dioïdes sélectifs-groupes.

4-2 LE THÉORÈME DE PERRON-FROBENIUS POUR DES DIOÏDES SÉLECTIFS-GROUPES

Dans ce paragraphe nous considérons une classe particulière de dioïdes sélectifs-groupes : celle dans laquelle le calcul de la racine $p^{\text{ième}}$ d'un élément (pour p entier naturel) est toujours possible.

Nous supposerons donc, dans tout ce paragraphe, que $(E, \oplus, \otimes)$ est un dioïde sélectif-groupe avec $\otimes$ commutative ayant la propriété (π) suivante :

$$(\pi) \quad \begin{cases} \forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, a \in E, \text{ l'équation :} \\ x^p = a \\ \text{a une solution unique dans E, notée } a^{1/p} \end{cases}$$

Exemple 4.2.1

Un exemple typique de dioïde sélectif-groupe ayant la propriété ci-dessus est le dioïde ($\mathbb{R}$, Max, +). L'opération $\otimes$ étant l'addition des réels, pour tout $a \in R$ l'équation

$$x^p = a \ (p \in \mathbb{N}, p \neq 0)$$

a une solution unique qui est le réel a/p (quotient habituel du réel a par l'entier p)

‖

Nous pouvons maintenant définir le *rayon spectral* ρ (A) d'une matrice $A \in M_n$ (E)

Définition 4.2.2

Soit (E, $\oplus$, $\otimes$) un dioïde sélectif-groupe avec la propriété (π). Le *rayon spectral* de $A \in M_n$ (E) est la quantité :

$$\rho\ (A) = \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{tr}(A^k)\right)^{\frac{1}{k}} \qquad (26)$$

(sommation au sens de $\oplus$) où tr (A^k) dénote la trace de la matrice A^k, c'est-à-dire la somme (au sens de $\oplus$) de ses éléments diagonaux.

La propriété suivante montre que le rayon spectral ainsi défini peut se réexprimer simplement en fonction des poids des circuits élémentaires du graphe G (A).

Propriété 4.2.3

Soit (E, $\oplus$, $\otimes$) un dioïde sélectif-groupe avec la propriété (π).

Soit $A \in M_n$ (E) et ρ (A) son rayon spectral. Alors :

$$\rho\ (A) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(w(\gamma)\right)^{\frac{1}{|\gamma|}} \qquad (27)$$

où Γ dénote l'ensemble des circuits élémentaires de G (A)

Démonstration

La matrice A^k a pour $i^{\text{ième}}$ terme diagonal la somme des poids des circuits de longueur k (élémentaires ou non) passant par i dans G (A). Comme $\oplus$ est sélective, $(A^k)_{ii}$ est donc le poids du circuit de poids maximum de longueur k passant par i (maximum au sens de la relation d'ordre total $\leq$ du dioïde).

Par suite tr (A^k) est le poids du circuit de poids maximum et de longueur k dans G (A).

On peut donc réexprimer ρ (A) sous la forme :

$$\rho(A) = \sum \left(w(\gamma)\right)^{\frac{1}{|\gamma|}} \qquad (28)$$

où la somme s'étend à tous les circuits γ de G (A) de cardinalité comprise entre 1 et n.

Montrons que, dans cette somme, seuls les circuits élémentaires ont à être pris en compte.

Supposons que γ soit un circuit non élémentaire qui se décompose en deux circuits élémentaires γ_1 et γ_2.

Comme $\leq$ est une relation d'ordre total, on peut toujours supposer que

$$w(\gamma_2)^{\frac{1}{|\gamma_2|}} \leq w(\gamma_1)^{\frac{1}{|\gamma_1|}}$$

Montrons alors que :

$$w(\gamma)^{\frac{1}{|\gamma|}} \leq w(\gamma_1)^{\frac{1}{|\gamma_1|}}$$

Posons $a = w(\gamma)^{\frac{1}{|\gamma|}}$ $\quad a_1 = w(\gamma_1)^{\frac{1}{|\gamma_1|}}$ $\quad a_2 = w(\gamma_2)^{\frac{1}{|\gamma_2|}}$

Comme :

$$w(\gamma) = w(\gamma_1) \otimes w(\gamma_2)$$

on a :

$$a^{|\gamma|} = a_1^{|\gamma_1|} \otimes a_2^{|\gamma_2|}$$

et comme $a_2 \leq a_1$, ceci implique :

$$a^{|\gamma|} \leq a_1^{|\gamma_1|} \otimes a_1^{|\gamma_2|}$$

d'où: $a \leq a_1$.

Par suite, dans la somme (28), tout terme de la forme $w(\gamma)^{\frac{1}{|\gamma|}}$ où γ est un circuit non élémentaire est dominé par un terme de la forme $w(\gamma_1)^{\frac{1}{|\gamma_1|}}$ où γ_1 est un circuit élémentaire. On en déduit la propriété annoncée. $\square$

Remarque 4.2.4

La définition donnée ci-dessus pour le rayon spectral d'une matrice de M_n (E) est cohérente avec la définition classique pour des matrices réelles. En effet, dans l'algèbre usuelle, pour une matrice A dont les valeurs propres sont réelles positives, le rayon spectral de A est égal à $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\mathrm{tr}\, A^k\right)^{1/k}$ (comme on peut s'en convaincre en mettant A sous forme triangulaire).

D'autre part, dans l'expression (26) la sommation peut être étendue de k = 1 à k = + ∞ comme l'a montré la démonstration de la Propriété 4.2.3 (la somme des poids des circuits non élémentaires ainsi ajoutés est absorbée par la somme des poids des circuits élémentaires).

On voit donc que l'expression (26) est bien l'analogue du rayon spectral habituel. ||

On peut alors énoncer le résultat suivant qui est un analogue du théorème de PERRON-FROBENIUS.

Théorème 5

Soit (E, ⊕, ⊗) un dioïde sélectif-groupe avec ⊗ commutative et vérifiant la propriété (π).
Si $A \in M_n$ (E) est une matrice irréductible de rayon spectral

$$\rho\,(A) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{tr} A^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

(i) ρ (A) est valeur propre de A

(ii) ρ (A) est l'unique valeur propre de A

(iii) si $V = (V_i)_{i\,=\,1\ldots n}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre ρ (A) alors $\rho\,(A) > \varepsilon$ et $\forall\ i = 1\ldots n$: $V_i > \varepsilon$

Démonstration

(i) D'après la Propriété 4.2.3 il existe un circuit élémentaire γ_o de G (A) tel que :

$$\rho\,(A) = \left(w\left(\gamma_0\right)\right)^{\frac{1}{|\gamma_0|}}$$

et, pour tout circuit γ de G (A)

$$\left(w\,(\gamma)\right)^{\frac{1}{|\gamma|}} \leq \left(w\left(\gamma_0\right)\right)^{\frac{1}{|\gamma_0|}} \qquad (29)$$

Nous allons voir que le corollaire 2.4 s'applique pour $\lambda = \rho$ (A).
Montrons tout d'abord que $(\lambda^{-1} \otimes A)^*$ existe, et pour cela montrons que dans G $(\lambda^{-1} \otimes A)$ le poids de tout circuit est 0-absorbant. Soit γ un circuit quelconque de G (A). Son poids relativement à $\lambda^{-1} \otimes A$ est :

$$\theta(\gamma) = w(\gamma) \otimes (\lambda^{-1})^{|\gamma|} = w(\gamma) \otimes \left[\left(w(\gamma_0)\right)^{-1}\right]^{\frac{|\gamma|}{|\gamma_0|}}$$

D'après l'inégalité (29) on a :

$$w(\gamma) \leq \left(w(\gamma_0)\right)^{\frac{|\gamma|}{|\gamma_0|}}$$

et par suite $\theta(\gamma) \leq \left(w(\gamma_0)\right)^{\frac{|\gamma|}{|\gamma_0|}} \otimes \left[\left(w(\gamma_0)\right)^{-1}\right]^{\frac{|\gamma|}{|\gamma_0|}} = e$

On a donc, pour tout circuit γ de G $(\lambda^{-1} \otimes A)$:
$\theta(\gamma) \oplus e = e$
et par suite $\theta(\gamma)$ est 0 - absorbant. On en déduit que $[\lambda^{-1} \otimes A]^*$ existe .

Montrons maintenant que si i est un sommet de γ_o alors la relation (6) du corollaire 2.4 est vérifiée.
D'après ce qui précède, le premier membre de (6) est égal à e et on a :

$$\sum_{\gamma \in P_{ii}} w(\gamma) \otimes (\lambda^{-1})^{|\gamma|} \leq e$$

Par ailleurs pour le circuit γ_o passant par i on a :
$w(\gamma_o) \otimes (\lambda^{-1})^{|\gamma_o|} = \lambda^{|\gamma_o|} \otimes (\lambda^{-1})^{|\gamma_o|} = e$ ce qui montre que le second membre de (6) est aussi égal à e.
Ceci montre que $\lambda = \rho$ (A) est valeur propre de A et que, pour tout $i \in \gamma_o$, $[(\lambda^{-1} \otimes A)^*]^i$ est un vecteur propre associé.

(ii) L'unicité de la valeur propre ρ (A) découle du corollaire 4.1.4.

(iii) Ceci découle directement du lemme 4.1.2. □

5. VALEURS PROPRES, BIDETERMINANT ET BIPOLYNOME CARACTERISTIQUE

On étudie dans ce paragraphe les liens pouvant exister entre les notions de valeurs propres/vecteurs propres et :

- la notion de dépendance ;
- le concept de bidéterminant et de bipolynôme caractéristique.

Commençons par établir un résultat général valable dans les dioïdes :

Théorème 6

Soit $(E, \oplus, \otimes)$ un dioïde avec $\otimes$ commutative et $A \in M_n(E)$. I désignant la matrice identité n x n, pour tout $\lambda \in E$, soit $\overline{A}(\lambda)$ la matrice 2 n x 2 n :

$$\overline{A}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A & \lambda \otimes I \\ \hline I & I \end{array}\right]$$

Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $\overline{A}(\lambda)$ a ses colonnes *dépendantes*.

Démonstration

(i) Si $V = (V_1, V_2, \ldots, V_n)^T \in E^n$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ alors en choisissant $J_1 = [1,2, \ldots n\}$, $J_2 = \{n + 1, \ldots, 2\,n\}$ et les coefficients :
$\mu_j = V_j$ $(j = 1, \ldots, n)$
$\mu_j = V_{j-n}$ $(j = n+1, \ldots, 2\,n)$
la relation $A \otimes V = \lambda \otimes V$ implique, sur les colonnes de $\overline{A}(\lambda)$, la relation de dépendance :

$$\sum_{j \in J_1} \mu_j \otimes \left[\overline{A}(\lambda)\right]^j = \sum_{j \in J_2} \mu_j \otimes \left[\overline{A}(\lambda)\right]^j \qquad (30)$$

(ii) Réciproquement, supposons les colonnes de $\overline{A}(\lambda)$ linéairement dépendante.
En notant $(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \mu_{n+1}, \ldots \mu_{2n})$ les coefficients de pondération associés aux colonnes de $\overline{A}(\lambda)$, on a donc une relation du type (30) avec $J_1 \neq \emptyset$ $J_2 \neq \emptyset$ $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ et $\mu j \neq \varepsilon$ pour $j \in J_1 \cup J_2$. (par convention, $\mu_j = \varepsilon$ pour $j \notin J_1 \cup J_2$).
En utilisant les équations (30) sur les composantes n+1 à 2n, on voit que, pour tout $j \in [1, n]$, les indices j et n+j ne peuvent être tous les deux dans J_1, ni tous les deux dans J_2 (en effet, dans le cas contraire, on aurait $\mu_j \oplus \mu_{n+j} = \varepsilon$; $(E, \oplus)$ étant canoniquement ordonné, ceci impliquerait :

$\mu_j = \mu_{n+j} = \varepsilon$). Par suite, si $j \in J_1$ alors nécessairement $n+j \in J_2$ et la relation de dépendance (30) implique : $\mu_{n+j} = \mu_j$.

De ce fait, dans la relation de dépendance (30), les indices j et n+j sont interchangeables et on peut donc toujours supposer $J_1 \subset \{1, 2,... n\}$.

En posant alors :
$V_j = \mu_j$ pour $j \in J_1$, $1 \leq j \leq n$
$V_j = \varepsilon$ pour $j \in [1, n] \setminus J_1$

la relation (30) s'écrit sur les n premières composantes des colonnes de $\overline{A}$ (λ) :

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \otimes A^j = \sum_{j=1}^{n} A^j \otimes V_j = \begin{bmatrix} \lambda \otimes V_1 \\ \lambda \otimes V_2 \\ \vdots \\ \lambda \otimes V_n \end{bmatrix}$$

ce qui montre que λ est valeur propre de A et $V = [V_1 ... V_n]^T$ un vecteur propre associé □

Remarque 5.1

Dans le cas de l'algèbre linéaire classique où (E, $\oplus$) est un groupe :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & \lambda I \\ \hline I & I \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} A - \lambda I & \lambda I \\ \hline 0 & I \end{array}\right] = \det (A - \lambda I)$$

la condition du Théorème 6 redonne bien le résultat classique : λ est valeur propre de A si et seulement si $\det (A - \lambda I) = 0$ ||

En considérant λ comme variable, chaque terme du bidéterminant de la matrice $\overline{A}$ (λ) peut être considéré comme un polynôme en λ. Le bipolynôme caractéristique de $A \in M_n$ (E) est alors défini comme la paire : ($P^+ (\lambda)$, $P^- (\lambda)$) où :

$$P^+ (\lambda) = \det^+ (\overline{A} (\lambda))$$
$$P^- (\lambda) = \det^- (\overline{A} (\lambda))$$

En utilisant le bipolynôme caractéristique, on peut alors énoncer le résultat suivant, qui étend, à certaines classes de dioïdes sélectifs, la caractérisation classique des valeurs propres comme racines du polynôme caractéristique.

Proposition 5.2

Soit (E, $\oplus$, $\otimes$) un dioïde sélectif, avec $\otimes$ commutative, A $\in$ Mn (E) et ($P^+(\lambda)$, $P^-(\lambda)$) son bipolynôme caractéristique.

(i) Si tout élément de E \ {ε} est régulier pour $\otimes$, alors tout λ valeur propre de A vérifie l'équation caractéristique $P^+(\lambda) = P^-(\lambda)$

(ii) Si (E, $\otimes$) est un groupe commutatif, alors tout λ vérifiant l'équation caractéristique :
$P^+(\lambda) = P^-(\lambda)$ est valeur propre.

Démonstration

(i) Si λ est valeur propre de A, en vertu du Théorème 6, $\overline{A}(\lambda)$ a ses colonnes linéairement dépendantes, et on a :
$\det^+(\overline{A}(\lambda)) = \det^-(\overline{A}(\lambda))$

(ii) Si (E, $\oplus$, $\otimes$) est un dioïde sélectif-groupe commutatif, alors $\det^+(\overline{A}(\lambda)) = \det^-(\overline{A}(\lambda))$ implique l'existence d'une relation de dépendance linéaire sur les colonnes de $\overline{A}(\lambda)$; le Théorème 6 permet alors de déduire que λ est valeur propre de A. $\square$

6. APPLICATIONS EN ANALYSE DE DONNÉES

Ce paragraphe est consacré à la présentation de quelques applications importantes du calcul d'éléments propres dans les dioïdes en Analyse de Données.

En *classification hiérarchique* on part de la donnée d'une *matrice de dissemblances* entre objets. En se plaçant alors dans le dioïde ($\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, Min, Max), on montre dans le § 6.1 qu'à chaque niveau λ de la classification on peut faire correspondre un ensemble de vecteurs propres de la matrice de dissemblances associés à la valeur propre λ ; de plus, cet ensemble constitue (l'unique) générateur minimal du semi-module propre $\mathcal{V}(\lambda)$. Ceci établit un lien intéressant avec une autre approche classique de l'Analyse des Données, à savoir l'Analyse Factorielle.

En *Analyse des Préférences* il s'agit d'ordonner un ensemble d'objets à partir de la donnée d'une *matrice de préférences* (obtenue en procédant à un certain nombre de comparaisons par paires). On montre dans le § 6.2. que plusieurs des méthodes existantes peuvent alors s'interpréter, dans un cadre unificateur, en termes de recherche de valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de préférences dans des dioïdes tels que $(\mathbb{R}^+, +, \times)$ $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \text{Max}, \text{Min})$, $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \text{Max}, \times)$.

6.1 APPLICATIONS EN CLASSIFICATION HIÉRARCHIQUE

Etant donné un ensemble de n objets $X = \{1, 2,... n\}$, supposons que l'on soit capable de définir, pour chaque paire d'objets (i, j), un indice ou une mesure de *dissemblance* $d_{ij} \in \mathbb{R}^+$ (notons que cet indice ne satisfait pas nécessairement les axiomes de distance). La dissemblance d_{ij} prendra des valeurs faibles si les deux objets i et j sont très semblables (en particulier, $d_{ij} = 0$ si i et j sont identiques) ; inversement d_{ij} prendra des valeurs grandes si les objets i et j sont très dissemblables.
Ainsi, à tout ensemble d'objets $X = \{1, 2,... n\}$, on fera correspondre une *matrice de dissemblances* $D = \left(d_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$
Notons que cette matrice est symétrique et à diagonale nulle ($\forall\ i \in X : d_{ii} = 0$).

Une *classification* des objets de X consiste à déterminer une partition de X en sous-ensembles (classes) de telle sorte qu'au sein d'une même classe les objets soient aussi semblables que possible, et qu'au contraire, des objets appartenant à des classes distinctes soient fortement dissemblables.

Comme on peut donner de très nombreux sens différents à la notion de proximité ou d'homogénéité d'un sous-ensemble d'objets, il existe une très grande variété de méthodes de classification. En *classification hiérarchique* on procède de la façon suivante. La matrice $D = (d_{ij})$ peut être considérée comme la matrice d'incidence sommets-sommets généralisée d'un graphe complet non orienté $G = [X, U]$ dont les sommets correspondent aux objets, et dont les arêtes sont valuées par les d_{ij}.

Pour tout réel $\lambda \geq 0$ on considère le graphe partiel de G au seuil λ, noté : $G_\lambda = [X, U_\lambda]$ où $U_\lambda = \left\{(i, j) \in U \,/\, d_{ij} \leq \lambda\right\}$.

Les composantes connexes de G_λ forment une partition de l'ensemble des objets X. Les éléments de cette partition constituent les classes de la classification de X au seuil λ.

En vertu de ce qui précède, deux sommets i et j sont dans une même classe au seuil λ si et seulement si il existe dans G une chaîne joignant i et j et dont toutes les arêtes ont des valuations $\leq \lambda$. De façon équivalente, i et j sont dans une même classe au seuil λ si et seulement si il existe dans G un chemin de i à j de *sup-section* $\leq \lambda$, la sup-section d'un chemin $\pi = \{i_o = i, i_1, i_2, \ldots i_p = j\}$ étant définie par :

$$\sigma(\pi) = \underset{k=0,\ldots,p-1}{\text{Max}} \left\{ d_{i_k \, i_{k+1}} \right\}$$

(cf Gondran & Minoux 1995 chap 4, § 2.9).

Ainsi, pour que i et j soient dans une même classe au seuil λ, il faut et il suffit que

$$d_{ij}^* = \underset{\pi \in P_{ij}}{\text{Min}} \left\{ \sigma(\pi) \right\} \leq \lambda$$

(où P_{ij} dénote l'ensemble des chemins entre i et j dans G).

Puisque d_{ij}^* peut se réécrire : $d_{ij}^* = \overset{\oplus}{\underset{\pi \in P_{ij}}{\sum}} \left(\overset{\otimes}{\underset{k}{\Pi}} d_{i_k \, i_{k+1}} \right)$

(avec $\oplus$ = Min et $\otimes$ = Max) on voit que la matrice $D^* = \left(d_{ij}^* \right)$ n'est autre que la quasi-inverse de D dans le dioïde ($\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, Min, Max).

D'après un résultat de Hu (1961), une chaîne de sup-section minimale entre deux sommets dans G correspond à la chaîne de *l'arbre de poids minimum* de G joignant ces deux sommets. La matrice D* peut donc être déterminée de façon efficace à partir d'un algorithme d'arbre minimum (cf. par exemple COLLOMB et GONDRAN 1977).

L'arbre de classification s'en déduit alors directement en considérant toutes les valeurs possibles du seuil λ (au plus n - 1 valeurs distinctes sont à considérer qui correspondent aux valuations des n - 1 arêtes de l'arbre minimum).

Si on a p valeurs distinctes : $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p$ $(p \leq n - 1)$, les classes de la partition du niveau λ_{i+1} sont incluses dans les classes de la partition de niveau λ_i (i = 1, …, p - 1) (d'où le nom de classification hiérarchique).

Exemple 1

Sur un ensemble de 7 objets X = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, considérons la matrice de dissemblances suivante :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 8 & 10 & 8 & 10 \\ 7 & 0 & 2 & 10 & 9 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 0 & 7 & 11 & 10 & 9 \\ 8 & 10 & 7 & 0 & 8 & 4 & 11 \\ 10 & 9 & 11 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 8 & 9 & 10 & 4 & 9 & 0 & 10 \\ 10 & 10 & 9 & 11 & 5 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

L'arbre minimum correspondant est donné à la figure 1.

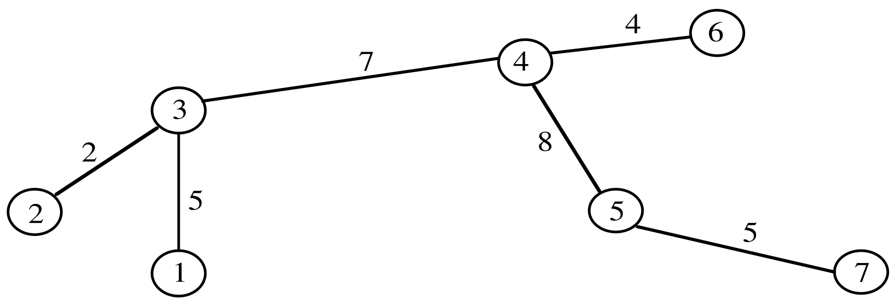


Figure 1 : arbre de poids minimum correspondant à la matrice de dissemblances D

La matrice D* s'en déduit simplement.

Ainsi, par exemple, d^*_{27} est la sup-section de l'unique chaîne de l'arbre joignant les sommets 2 et 7 donc :

$d^*_{27} = \text{Max}\ \{d_{23}, d_{34}, d_{45}, d_{57}\} = 8$

On obtient :

$$D^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 7 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & 0 & 2 & 7 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 0 & 7 & 8 & 7 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 0 & 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 4 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad (31)$$

Au seuil $\lambda = 5$, on a par exemple :

$d^*_{23} \le \lambda \qquad d^*_{13} \le \lambda \qquad d^*_{46} \le \lambda$

ce qui montre que les sommets 1, 2, 3 sont dans une même classe ; de même les sommets 4 et 6 sont dans une même classe.

Par contre les sommets 3 et 5 ne sont pas dans une même classe car

$d^*_{35} = 8 > 5$

L'arbre de classification hiérarchique pour l'exemple ci-dessus est donné à la figure 2

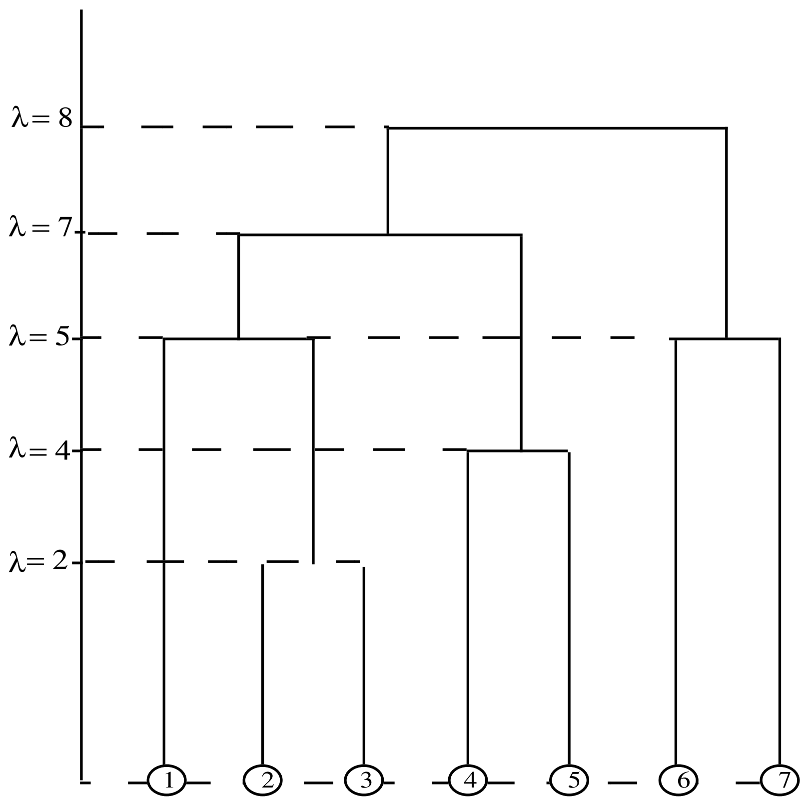


Figure 2 : Arbre de classification correspondant à l'exemple 1

Pour obtenir la partition en classes correspondant à un niveau λ donné, il suffit de "couper" l'arbre de classification de la figure 2 par une horizontale d'ordonnée λ. Ainsi, par exemple, la classification au niveau $\lambda = 5$ est la partition {1, 2, 3} {4, 6} {5, 7} ; au niveau $\lambda = 4$: {1} (2, 3} {4, 6} {5} {7} ‖

Comme D a tous ses termes diagonaux égaux à e = 0 (l'élément neutre de $\otimes$) on a

$D = I \oplus D$ et par suite :

$D^* = D^{n-1}$.

Dans le dioïde ($\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, Min, Max) on a donc : $(D^*)^2 = D^*$ ce qui montre que D^* est une *distance ultramétrique* c.a.d. vérifie, $\forall$ i, j :

$$d^*_{ij} \le \underset{k}{\mathrm{Max}} \left\{ d^*_{i_k}, d^*_{k_j} \right\}$$

On rappelle que D^* est la distance ultramétrique sous-dominante, c.a.d. le plus grand élément de l'ensemble des ultramétriques inférieures ou égales à D.

Nous allons voir maintenant qu'il existe des liens intéressants entre classification hiérarchique et la structure des vecteurs propres de la matrice des dissemblances D. Le dioïde ($\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, Min, Max) est *sélectif* et à multiplication *commutative idempotente*. Par ailleurs, e = 0 est le plus grand élément (au sens de la relation d'ordre canonique) car, $\forall$ a $\in \mathbb{R}^+$: $\quad e \oplus a = \mathrm{Min}\,\{0, a\} = e$

Les principaux résultats du §3 (théorème 3 et corollaire 8) peuvent donc s'appliquer. En particulier (en tenant compte du fait que, $\forall$ i : $d^*_{ii} = e = 0$) :

– l'ensemble des vecteurs distincts de la forme $\overline{V}^i = [D^*]^i$ constitue (l'unique) générateur minimal de $\vartheta(e)$;
– tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ est valeur propre de D ;
– pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble des vecteurs distincts de la forme $\lambda \otimes [D^*]^i$ constitue (l'unique) générateur minimal de $\vartheta(\lambda)$.

Le résultat suivant montre que, pour chacun des niveaux λ de la classification, l'ensemble des vecteurs propres pour la valeur propre λ contient toute l'information nécessaire pour définir les classes de niveau λ.

Théorème 6 (Gondran, 1976)
A chaque niveau λ d'une classification hiérarchique relative à une matrice de dissemblances $D = (d_{ij})$, deux objets i et j appartiennent à une même classe si et seulement si les deux vecteurs propres $\lambda \otimes [D^*]^i$ et $\lambda \otimes [D^*]^j$ sont égaux. Les vecteurs distincts de la forme $\lambda \otimes [D^*]^i$ pour i = 1, …, n forment l'unique générateur minimal de $\mathcal{V}(\lambda)$.

Exemple 1 *(suite)*
Illustrons les résultats qui précèdent sur la matrice D^* donnée par (31).
Au niveau $\lambda = 5$ par exemple, une première classe est formée par les objets {1, 2, 3}.
On vérifie que l'on a bien :

$$\lambda \otimes [D^*]^1 = \lambda \otimes [D^*]^2 = \lambda \otimes [D^*]^3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad (32)$$

Une deuxième classe est formée par les objets {4, 6}, et on vérifie que :

$$\lambda \otimes [D^*]^4 = \lambda \otimes [D^*]^6 = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

La troisième classe est formée par {5, 7}, et l'on a :

$$\lambda \otimes [D^*]^5 = \lambda \otimes [D^*]^7 = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad (34)$$

Les trois vecteurs donnés par (32) (33) et (34) constituent (l'unique) générateur minimal du moduloïde propre $\mathcal{V}$ (5). ‖

L'interprétation des classes a un niveau quelconque λ en termes de générateurs du moduloïde propre associé à la valeur propre λ, établit une analogie intéressante avec une autre approche classique de l'analyse des données : l'analyse factorielle (cf. par exemple Benzecri 1974).
Dans les deux cas, l'information pertinente servant de support à l'analyse est fournie par les éléments propres de la matrice des dissemblances. Seules les structures algébriques sous-jacentes sont différentes.

6.2 APPLICATIONS EN ANALYSE DES PRÉFÉRENCES

Etant donnés n objets, on cherche à établir un ordre de préférence sur ces objets à partir de comparaisons entre paires d'objets réalisées, par exemple, par des arbitres ou des juges (cas des tournois) ou par des consommateurs (cas d'une analyse de marché).

On suppose donc donnée la matrice de préférences sur les paires d'objets, laquelle sera notée $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$

Ainsi, pour toute paire (ordonnée) d'objets (i, j), a_{ij} est égal au nombre de juges (de consommateurs) ayant préféré i à j. On convient de poser $a_{ij} = \frac{1}{2}$ en cas d'indifférence entre les objets i et j. Dans le cas d'un tournoi, a_{ij} sera égal au nombre de parties gagnées sur j au cours de rencontres entre i et j.

Différentes approches pour ordonner des objets à partir d'une matrice de préférences ont été proposées. Nous allons voir que, pour chacune d'elles, l'information pertinente permettant de comparer les objets est fournie par des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice de préférences *dans un dioïde bien choisi*.

a) *La méthode de "l'ordre moyen" et le dioïde* ($\mathbb{R}_+, +, \times$)

Cette méthode, proposée dans BERGE (1958), consiste à ordonner les objets (les joueurs d'un tournoi, dans l'exemple étudié par BERGE) selon les valeurs des composantes du vecteur propre associé à la valeur propre (réelle) de plus grand module de la matrice A (cette valeur propre étant simple, le sous-espace propre associé a pour dimension 1 (cf. BERGE 1958, chapitre 14). Comme, d'après le théorème de Perron-Frobenius, ce vecteur propre a ses composantes toutes strictement positives, l'ordre proposé – encore appelé *ordre moyen* – correspond simplement à celui des valeurs décroissantes des composantes.

Exemple 2

Considérons, pour un ensemble de 4 objets, la matrice de préférences suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 3{,}5 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \\ 2{,}5 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A étant une matrice réelle à coefficients tous positifs ou nuls, son rayon spectral ρ (A) est égal à la plus grande valeur propre réelle positive, ici $\lambda = 8{,}92$.

On vérifie que le vecteur propre associé est :

$$V = \begin{bmatrix} 0{,}56 \\ 0{,}46 \\ 0{,}50 \\ 0{,}47 \end{bmatrix}$$

L'ordre moyen qui en résulte sur les objets est : 1, 3, 4, 2 (l'objet 1 est le premier, l'objet 3 est le second, etc.). ||

La méthode de "l'ordre moyen" exploite ainsi les informations fournies par un vecteur propre particulier (celui qui correspond à la plus grande valeur propre réelle positive) dans le dioïde ($\mathbb{R}^+$, +, $\times$).

b) La méthode des ordres partiels et le dioïde ($R^+ \cup \{+\infty\}$, Max, Min)

Une seconde méthode, proposée par DEFAYS (1978) procède par détermination d'une hiérarchie de relations d'ordre (partiel) sur les objets, dont les classes d'équivalence sont emboîtées les unes dans les autres. Plus précisément, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les classes de niveau λ sont définies comme les composantes *fortement connexes* du graphe $G_\lambda = [X, U_\lambda]$, où X est l'ensemble des objets et où l'ensemble d'arcs est :
$U_\lambda = \{(i, j) / a_{ij} \geq \lambda\}$

Si on note C_λ (i) la classe de niveau λ contenant i, alors pour tout $\lambda' \leq \lambda$
$C_{\lambda'}(i) \supset C_\lambda(i)$.

En notant $\mathcal{R}_\lambda$ la relation d'équivalence :
$i \, \mathcal{R}_\lambda \, j \quad \Leftrightarrow$ i et j appartiennent à la même classe de niveau λ
alors, pour chaque niveau λ, le graphe quotient $G_\lambda / \mathcal{R}_\lambda$ est un graphe sans circuit, donc le graphe d'une relation d'ordre (partiel). Lorsque λ prend toutes les valeurs réelles possibles, on obtient ainsi un ensemble d'ordres partiels sur des classes emboîtées les unes dans les autres.
Comme en classification hiérarchique (cf. § 5.1), les classes obtenues à chaque niveau λ (donc l'arbre de classification) se déduisent de la structure des vecteurs propres associés à la valeur propre λ dans le dioïde ($\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, Max, Min).

L'exemple suivant illustre la méthode, et montre que la matrice A^+ contient en réalité une information plus riche que celle nécessaire pour construire l'arbre de classification seul : elle permet, en plus, d'obtenir les graphes quotients, c'est-à-dire les ordres partiels à chacun des niveaux. Cette information peut être extrêmement utile pour l'interprétation des résultats de l'analyse.

Exemple 3

Reprenons la même matrice que dans l'exemple 2, mais considérée, cette fois, dans le dioïde ($\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, Max, Min). La matrice $A^+ = A \oplus A^2 \oplus A^3$ est :

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

La classification comprend donc trois niveaux $\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 3$

La figure 3 indique les graphes G_{λ_1} G_{λ_2} et G_{λ_3} et les graphes quotients obtenus aux différents niveaux de cette classification.

Au niveau $\lambda_1 = 5$ on a quatre classes {1} {2} {3} {4}. Au niveau $\lambda_2 = 4$, on a les deux classes {1} {2 3 4} et au niveau $\lambda_3 = 3$, on a une classe unique {1, 2, 3, 4,}.

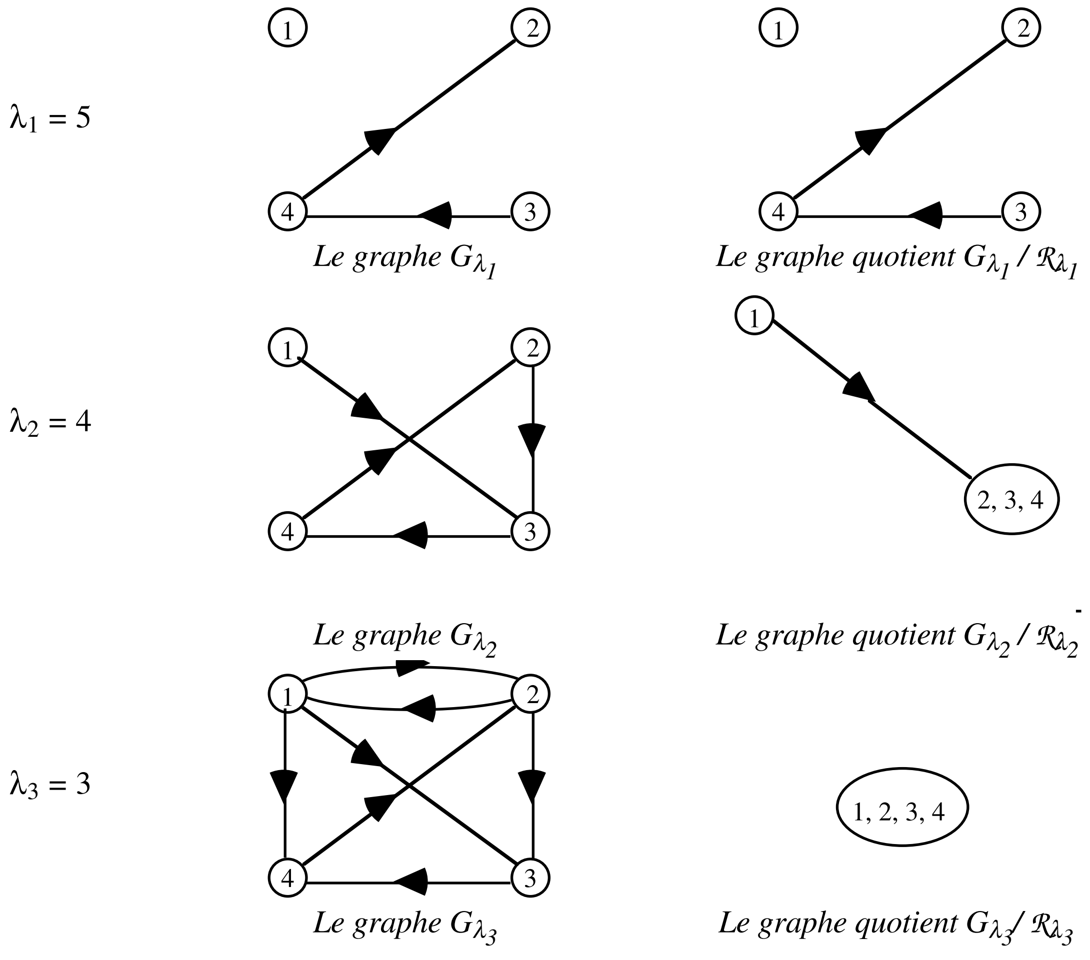


Figure 3 : Les graphes G_λ et les graphes quotients $G_\lambda / \mathcal{R}_\lambda$ obtenus aux différents niveaux de la classification dans l'exemple 3

On observe qu'au niveau $\lambda_3 = 3$, les quatre objets apparaissent équivalents. Cependant l'examen du niveau $\lambda_2 = 4$ permet de raffiner l'analyse, le graphe quotient $G_{\lambda 2} / \mathcal{R}_{\lambda 2}$ montrant qu'à ce niveau, l'objet 1 est préféré aux trois autres. Au niveau λ_2, les trois objets 2, 3, 4 apparaissent équivalents, mais au niveau le plus bas ($\lambda_1 = 5$) ils peuvent être différenciés : 3 est préféré à 4, qui lui-même est préféré à 2. ‖

c) La méthode du "circuit de moindre consensus" et le dioïde ($\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, Max, $\times$)

Cette méthode, suggérée par GONDRAN (1995), utilise l'information fournie par la valeur propre et les vecteurs propres associés de la matrice de préférences A dans le dioïde ($\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, Max, $\times$). D'après le lemme 9 et le corollaire 9 du § 4, A admet une valeur propre unique qui correspond au circuit γ_o de G (A) tel que :

$$\lambda = w(\gamma_o)^{\frac{1}{|\gamma_o|}} = \operatorname*{Max}_{\gamma} \left\{ w(\gamma)^{\frac{1}{|\gamma|}} \right\}$$

(maximum pris sur l'ensemble des circuits élémentaires du graphe) où pour chaque circuit γ, $|\gamma|$ dénote le nombre d'arcs du circuit et w (γ) le produit des valuations a_{ij} des arcs de γ.

Le circuit γ_o est donc le circuit du graphe G (A) pour lequel la moyenne géométrique des valuations est la plus grande. Ce circuit peut être interprété comme l'ensemble des objets pour lequel le consensus est le moins bon (cf. GONDRAN 1995).

Exemple 4

Pour la matrice de préférences de l'exemple 1 considérée maintenant dans le dioïde ($\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, Max, x) on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 17{,}5 & 12 & 20 \\ 8 & 9 & 12 & 20 \\ 12{,}5 & 25 & 8 & 7 \\ 15 & 7{,}5 & 20 & 8{,}75 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 52{,}5 & 100 & 70 & 60 \\ 50 & 100 & 36 & 60 \\ 75 & 37{,}5 & 100 & 43{,}75 \\ 40 & 43{,}75 & 60 & 100 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 300 & 300 & 400 & 350 \\ 300 & 300 & 400 & 180 \\ 200 & 225 & 300 & 500 \\ 250 & 500 & 175 & 300 \end{pmatrix}$$

Par suite, la valeur propre de A est :
$\lambda = \text{Max}\left\{\sqrt{9}\,;\ \sqrt[3]{100}\,;\ \sqrt[4]{300}\right\} = \sqrt[3]{100} = 4{,}64$
et cette valeur propre correspond au circuit
$\gamma = \{(2, 3)\ (3, 4)\ (4, 2)\}$ de poids w (γ) = 4 x 5 x 5 = 100. ||

7. APPLICATIONS EN AUTOMATIQUE : THÉORIE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES LINÉAIRES DANS LE DIOÏDE ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, Max, +)

La théorie des systèmes dynamiques linéaires est une branche classique et très développée de l'automatique. De nombreux problèmes d'observabilité, de commandabilité, de stabilité, de commande sont bien résolus dans cette classe de systèmes. Ceci contraste avec le domaine du non linéaire où la théorie fait souvent défaut.

Cependant, un des résultats remarquables de ces dernières années a été la mise en évidence de sous-classes particulières de problèmes non linéaires (au sens de la théorie classique) pouvant être traités par des techniques d'algèbre linéaire, à condition d'écrire leurs équations de comportement dans des structures algébriques appropriées, autres que l'algèbre usuelle sur $\mathbb{R}$.

Un exemple caractéristique est celui du dioïde ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, Max, +) qui s'est révélé être la structure algébrique de base pour modéliser certains systèmes dits à *événements discrets*. De nombreux résultats classiques de l'automatique ont ainsi pu être transposés dans ce cadre nouveau et donner naissance à une véritable théorie des systèmes dans le dioïde "(Max, +)".

Après un bref rappel sur les modèles classiques de l'automatique linéaire (§ 7.1) et sur les Réseaux de Petri (§ 7.3), nous montrons dans le § 7.4 comment le comportement dynamique d'une classe particulière de Réseaux de Petri (les graphes d'événements temporisés) peut être modélisé par des équations d'état linéaires dans les dioïdes ($\mathbb{R}^+$, Max, +) ou ($\mathbb{R}^+$, Min, +). Dans le § 7.5, on s'intéresse aux performances maximales qu'il est possible d'obtenir de tels systèmes en mode de fonctionnement autonome. On montre que le taux de production maximum est lié à l'unique valeur propre dans le dioïde ($\mathbb{R} \cup -\infty$, Max, +) de la matrice intervenant dans l'expression explicite de la solution de l'équation d'état.

7.1 SYSTÈMES LINÉAIRES EN AUTOMATIQUE CLASSIQUE

La théorie des systèmes dynamiques linéaires s'intéresse à l'étude de systèmes dont le comportement au cours du temps est décrit (dans le cas d'un modèle à temps discret) par une équation d'évolution de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = A.x(t-1) + B.u(t) & (35) \\ y(t) = C.x(t)) & (36) \end{cases}$$

où :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$ désigne le *vecteur d'état* du système à l'instant t ;

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$ désigne le *vecteur des observations* sur le système à l'instant t ;

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$ désigne le *vecteur des commandes* appliquées au système à l'instant t ;

A, B, C sont des matrices réelles de dimensions n x n, n x p, m x n respectivement (lorsque les cœfficents de ces matrices sont variables avec le temps, on parle de système non stationnaire. Lorsque ce sont des constantes indépendantes du temps, on dit que le système est stationnaire).

Les équations d'évolution (35) et (36), qui utilisent les opérations de l'algèbre usuelle dans $\mathbb{R}^n$, constituent une des modèles de base de l'automatique et de la théorie des systèmes, et les applications en sont extrêmement nombreuses : contrôle de processus industriels, contrôle de trajectoires, théorie du signal, etc. (cf. par exemple KWAKERNAAK & SIVAN 1972, KAILATH 1980).
Il existe néanmoins beaucoup d'autres applications qui ne peuvent être appréhendées par ces modèles linéaires classiques. C'est le cas, en particulier, de problèmes de type "ordonnancement dynamique".

7.2 LES PROBLÈMES D'ORDONNANCEMENT DYNAMIQUE

Les problèmes d'ordonnancement dynamique apparaissent dans de nombreuses applications, telles que la productique (optimisation d'ateliers flexibles par exemple) ou l'architecture de systèmes informatiques parallèles ou distribués (compilation d'applications parallèles, placement de tâches, etc.).

Dans de tels problèmes, il s'agit typiquement de traiter un flux de tâches en entrée, en affectant ces tâches à des unités de traitement (machines, processus) sous des contraintes diverses (exclusion mutuelle, synchronisation, délai maximum de traitement, etc.). Parmi toutes les solutions existantes, on s'intéresse souvent :
– à des solutions particulières (ordonnancements cycliques par exemple) ;
– à des solutions optimisant un critère tel que le *taux de production* (nombre de pièces traitées par unité de temps).

De tels problèmes ne peuvent se réduire à des équations linéaires de la forme (35) (36) dans l'algèbre usuelle. Par contre, de nombreux travaux tels que ceux de CUNINGHAME-GREEN (1962, 1979, 1991), CUNINGHAME-GREEN & MEIJER (1988), COHEN et co-auteurs (1983, 1985, 1989), BACCELLI et co-auteurs (1992) ont montré que certains problèmes d'ordonnancement dynamiques pouvaient être représentés par des *modèles linéaires dans des dioïdes* appropriés tels que ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, Max, +) ou ($\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, Min, +). Comme nous le verrons au § 7.4, il s'agit essentiellement de systèmes dont les évolutions au cours du temps correspondent au comportement de réseaux de Petri particuliers : les *graphes d'événements temporisés*. Rappelons tout d'abord quelques notions de base sur les réseaux de Petri.

7.3 MODÉLISATION DE SYSTÈMES À ÉVÉNEMENTS DISCRETS PAR RÉSEAUX DE PETRI

On rappelle (cf. par exemple PETERSON 1981, BRAMS 1983) qu'un réseau de Petri est un graphe biparti orienté et valué $R = [P \cup T, U]$, où l'ensemble des sommets est formé par un ensemble de *places* P et un ensemble de *transitions* T, et où l'ensemble U comprend des arcs joignant une place à une transition et des arcs joignant une transition à une place (le graphe étant *biparti,* il n'y a pas d'arc joignant une place à une autre place, ni d'arc joignant une transition à une autre transition). A chaque arc $u = (i, j)$ de R est associé une *valuation* $\alpha(i, j) \in \mathbb{N}$. La figure 4 donne un exemple de réseau de Petri où, selon l'usage, les places ont été indiquées par des cercles et les transitions par des rectangles allongés.

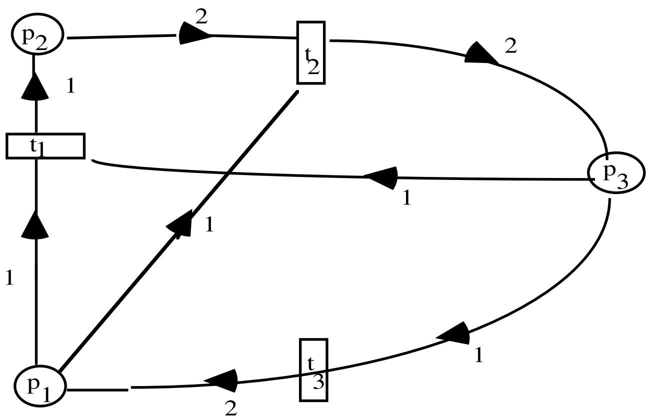


Figure 4 : un exemple de réseau de Petri où $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ est l'ensemble des places et $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ est l'ensemble des transitions. Les valuations sont indiquées en regard de chacun des arcs

Un réseau de Petri R est dit *marqué* lorsqu'on associe à chaque place $p \in P$ un nombre entier naturel M(p) appelé *marque de p*.

Dans les applications, la marque d'une place correspond typiquement à une quantité de ressource disponible à un certain endroit dans le système. La marque d'une place est souvent représentée par des *jetons*, on dit alors que la place p contient M(p) jetons.

L'évolution au cours du temps des marques des places dans un réseau de Petri se fait selon le processus *d'activation* (ou de tirage) des transitions.

Une transition $t \in T$ est dite activable (ou tirable) à partir d'un marquage donné M si et seulement si :
$\forall\ p \in \Gamma^{-1}(t) = \{i \,/\, i \in P, (i, t) \in U\}$, on a : $M(p) \geq \alpha(p, t)$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'activation (le tirage) de la transition t conduit à un nouveau marquage M' défini, $\forall\ p \in P$, par :

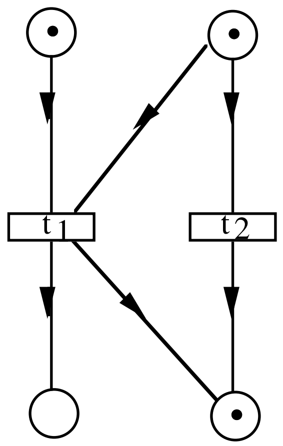
$$\begin{cases} M'(p) = M(p) & \text{si } p \notin \Gamma^{-}(t) \cup \Gamma^{+}(t) \\ M'(p) = M(p) - \alpha(p, t) & \text{si } p \in \Gamma^{-}(t) \\ M'(p) = M(p) + \alpha(t, p) & \text{si } p \in \Gamma^{+}(t) \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, dans le cas du réseau de la Figure 4, en partant du marquage $M = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (où $M(p_1) = 3$, $M(p_2) = 3$, $M(p_3) = 1$), on atteint par tirage de la transition t_1 le marquage $M' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; puis à partir de M', par tirage de la transition t_2 on obtient le marquage $M'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et ainsi de suite.

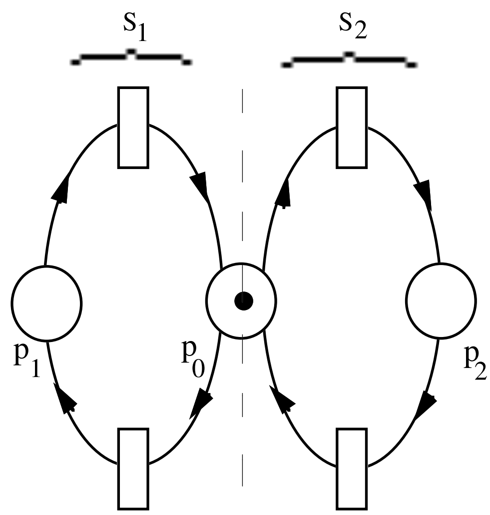
Le formalisme des réseaux de Petri généraux est très puissant, en ce sens qu'il permet de représenter de façon fine et précise une grande variété de comportements des systèmes réels. Sans être exhaustif, on peut mentionner :

– *le conflit* entre deux (ou plusieurs) séries d'actions. La figure (5a) en fournit un exemple : à partir du marquage indiqué, chacune des deux transitions t_1 et t_2 est activable, mais une et une seulement parmi les deux transitions t_1 et t_2 pourra être activée.

– *l'exclusion mutuelle* (partage de ressources par exemple). La figure (5b) fournit un exemple où les deux sous-systèmes S_1 et S_2 ne peuvent évoluer indépendamment l'un de l'autre, du fait qu'ils partagent la ressource représentée par la place centrale p_o. L'entrée en fonctionnement d'un des deux sous-systèmes consomme le jeton initialement présent en p_o ; l'autre sous-système doit donc attendre que le jeton soit revenu en p_o pour commencer à fonctionner.



(5a) Exemple d'une situation de conflit entre deux transitions t_1 et t_2 : seule une des deux peut être activée



(5b) Exemple d'une situation d'exclusion mutuelle représentant le partage de ressource commune à deux sous-systèmes S_1 et S_2

Figures 5 : deux exemples caractéristiques de comportements modélisables par réseau de Petri

– *la synchronisation* entre plusieurs processus.

Evidemment, la puissance d'expression du formalisme des réseaux de Petri généraux a une contrepartie : la difficulté de résolution de nombreux problèmes de base tels que :

– *l'accessibilité* : existe-t-il une séquence de transitions activables les unes à la suite des autres et permettant d'atteindre un marquage M' à partir d'un marquage M donné ?

– *la vivacité* : à partir de n'importe quel marquage accessible est-il possible, pour toute transition t, d'atteindre un état où t est activable ?

– *le caractère borné* : existe-t-il un entier naturel B tel que, pour toute place $p \in P$ et tout marquage accessible M, on ait $M(p) \leq B$?

Pour tous ces problèmes (et quelques autres), il n'existe pas d'algorithmes pratiquement efficaces, sauf pour des sous-classes restreintes de réseaux de Petri telles que : machines à états, graphes d'événements, réseaux à choix libre et à choix libres étendus (cf. par ex. PETERSON, 1981). Nous allons voir que, parmi ces sous-classes particulières, le comportement dynamique des *graphes d'événements temporisés* peut être représenté par des *équations linéaires dans des dioïdes*.

7.4 LES GRAPHES D'ÉVÉNEMENTS TEMPORISÉS ET LEUR REPRÉSENTATION LINÉAIRE DANS ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, MAX, +) ET ($\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, MIN, +)

On appelle *graphe d'événements* un réseau de Petri ayant la propriété particulière que chaque place possède un seul arc en entrée et un seul arc en sortie (nous nous restreignons au cas où tous les arcs ont une valuation 1).
La figure 6 donne un exemple de graphe d'événements (tiré de BACCELLI et co-auteurs) qui nous servira d'illustration dans la suite.
Notons que les graphes d'événements ne permettent pas de modéliser les situations de conflit ou d'exclusion mutuelle telles que celles illustrées par les figures (5a) et (5b). Néanmoins, cette sous-classe de réseaux de Petri est intéressante pour de nombreuses applications où l'on doit essentiellement modéliser des contraintes de *synchronisation* entre plusieurs processus.

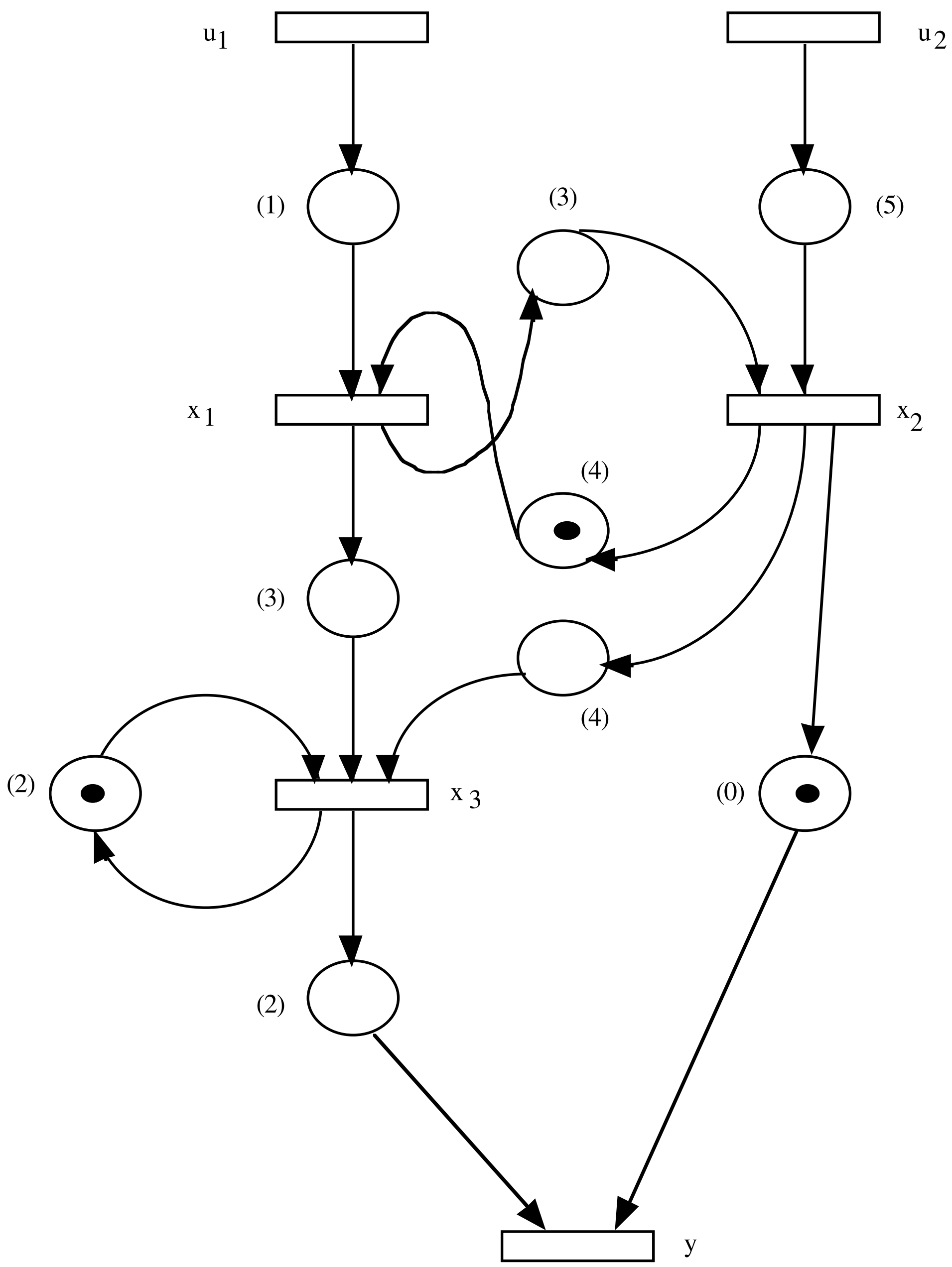
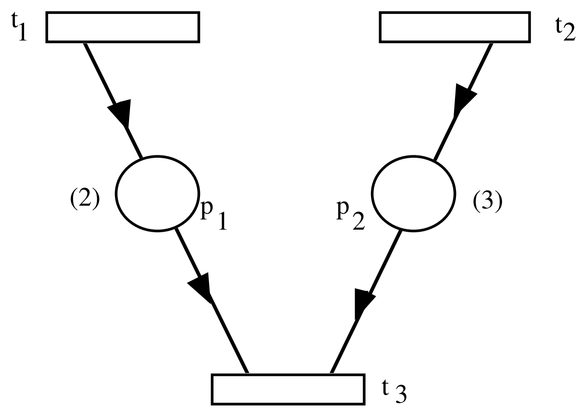


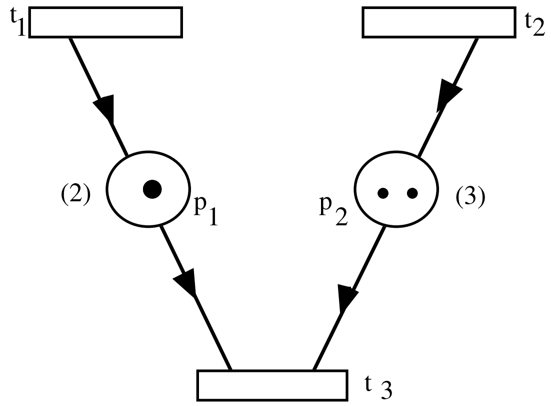
Figure 6 : Exemple d'un graphe d'événements (temporisé).
Les temporisations indiquées entre parenthèses en regard de chaque place, représentent le temps minimal de séjour d'un jeton dans les places. On a indiqué également les jetons dans le marquage initial

On dit qu'un graphe d'événements est *temporisé* si on associe à chaque place $p \in P$ un temps θ (p) interprété comme la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place. (On peut aussi associer à chaque transition $t \in T$ un temps θ (t) – durée minimale d'activation de la transition t – mais on montre facilement qu'il est toujours possible de se ramener au cas où seules les places sont temporisées). La figure 6 fournit un exemple de graphe d'événements temporisé.

Le comportement dynamique d'un système tel que celui de la Figure 6 peut se représenter algébriquement de différentes façons.
Une façon naturelle de procéder consiste à associer à chaque transition t une fonction croissante $x_t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_t (n) désigne la date à laquelle se produit la $n^{\text{ième}}$ activation de la transition t (date comptée à partir de l'instant 0, considéré comme le début du fonctionnement du système). Nous allons voir que les variables x_t (n) doivent vérifier un ensemble d'inégalités dites "équations aux dateurs".
Illustrons d'abord le principe de la mise en équation sur les petits exemples de la figure 7, où l'on a trois transitions et deux places p_1 et p_2 temporisées avec θ $(p_1) = 2$ et θ $(p_2) = 3$.



(7a) L'équation de fonctionnement pour cet exemple est
$x_3 (n) \geq \text{Max} \{2 + x_1 (n) ; 3 + x_2 (n) \}$



(7b) L'équation de fonctionnement pour cet exemple est :
$x_3\ (n) \geq \text{Max}\ \{2 + x_1\ (n - 1)\ ;\ 3 + x_2\ (n - 2)\}$

Figure 7 : principe de la mise en équation du fonctionnement d'un graphe d'événement temporisé

Sur la figure (7a), aucun jeton n'est présent initialement dans les places. La date au plus tôt de la $n^{\text{ième}}$ activation de la transition t_3 est donc conditionnée par la date de la $n^{\text{ième}}$ activation de t_1 et la date de la $n^{\text{ième}}$ activation de t_2. Si l'on tient compte du temps de séjour minimal d'un jeton dans p_1 on doit avoir :
$x_3\ (n) \geq 2 + x_1\ (n)$
et de la même façon, en tenant compte de la temporisation de p_2 :
$x_3\ (n) \geq 3 + x_2\ (n)$
On obtient donc pour $x_3\ (n)$ l'inéquation $x_3\ (n) \geq \text{Max}\ \{2 + x_1\ (n)\ ;\ 3 + x_2\ (n)\}$

La figure (7b) représente une situation plus générale où des jetons peuvent être présents dans certaines places à l'instant initial. Dans ce cas, la date au plus tôt de la $n^{\text{ième}}$ activation de t_3 est conditionnée par la date au plus tôt de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ activation de t_1 (car un jeton est présent initialement dans p_1) et par la date au plus tôt de la $(n - 2)^{\text{ième}}$ activation de t_2 (car deux jetons sont présents initialement dans p_2). L'inéquation sur $x_3\ (n)$ peut alors s'écrire :
$x_3\ (n) \geq \text{Max}\ \{2 + x_1\ (n - 1)\ ;\ 3 + x_2\ (n - 2)\}$

En appliquant maintenant ce principe au réseau de la figure 6 tout entier, on obtient le système :

$$\begin{cases} x_1(n) \geq \text{Max}\left\{4+x_2(n-1); 1+u_1(n)\right\} \\ x_2(n) \geq \text{Max}\left\{3+x_1(n)\ ;\ 5+u_2(n)\right\} \\ x_3(n) \geq \text{Max}\left\{3+x_1(n)\,; 4+x_2(n)\,; 2+x_3(n-1)\right\} \\ y(n) \geq \text{Max}\left\{x_2(n-1)\,; 2+x_3(n)\right\} \end{cases}$$

(où les inégalités s'entendent au sens de la relation d'ordre habituelle sur $\mathbb{R}$). Notons que, dans l'ensemble des relations ci-dessus, on obtiendra des dates au plus tôt en faisant en sorte que chaque inégalité soit satisfaite avec l'égalité.

Dans le dioïde ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, Max, +) où $\oplus$ = Max et $\otimes$ = +, $\varepsilon = -\infty$, e = 0, le système précédent se met sous la forme :

$$\begin{cases} x_1(n) \geq 4 \otimes x_2(n-1) \oplus 1 \otimes u_1(n) \\ x_2(n) \geq 3 \otimes x_1(n) \oplus 5 \otimes u_2(n) \\ x_3(n) \geq 3 \otimes x_1(n) \oplus 4 \otimes x_2(n) \oplus 2 \otimes x_3(n-1) \\ y(n) \geq 2 \otimes x_3(n) \oplus e \otimes x_2(n-1) \end{cases}$$

ou encore, de façon matricielle :

$$\begin{cases} x(n) \geq A_o \otimes x(n) \oplus A_1 \otimes x(n-1) \oplus B \otimes u(n) & (37) \\ y(n) \geq C_o \otimes x(n) \oplus C_1 \otimes x(n-1) & (38) \end{cases}$$

avec :

$$A_o = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & 4 & \varepsilon \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$C_o = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \qquad C_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Par analogie avec le cas classique (équations (35) et (36) du § 7.1) l'équation matricielle (37) est l'équation d'état, l'équation (38) est l'équation d'observation, x est le vecteur d'état (ici à trois composantes), u le vecteur de commande (ici à deux composantes) et y le vecteur des observations ou sortie du système (ici à une composante).

Pour résoudre l'équation d'état (37), on peut utiliser les résultats généraux concernant la résolution de systèmes linéaires de la forme $X = A \otimes X \oplus B$, en les appliquant à :

$x(n) = A_0 \otimes x(n) \oplus A_1 \otimes x(n-1) \oplus B \otimes u(n)$ (37)'
(c.à.d. (37) dans lequel toutes les inégalités ont été remplacées par des égalités).

Moyennant l'existence de A_0^*, quasi-inverse de A_0 (c.à.d. en supposant l'absence de circuit positif dans $G(A_o)$) la solution minimale de (37)' s'écrit :
$x(n) = A_0^* \otimes A_1 \otimes x(n-1) \oplus A_0^* \otimes B \otimes u(n)$ (39)

Comme x (n) donné par (39) vérifie aussi (37), on remarque qu'il s'agit également de la solution minimale de (37). Dans cette solution, toutes les inégalités sont satisfaites avec l'égalité : (39) définit donc l'ensemble des dates au plus tôt pour le fonctionnement du système. Ainsi, à partir de la donnée de la suite des vecteurs de commande u (1) u (2)… et de "l'état initial" x (o), (39) permet de déterminer successivement toutes les valeurs x (1), x (2), … du vecteur d'état.

Chaque composante i du vecteur d'état correspond à une transition t_i du système et, dans la solution donnée par (39), $x_i(1)$ représente la *date au plus tôt* de la première activation de t_i, $x_i(2)$ la *date au plus tôt* de la deuxième activation de t_i, etc.

Les graphes d'événements temporisés peuvent également être représentés comme des systèmes dynamiques linéaires dans le dioïde $(R \cup \{+\infty\}, \text{Min}, +)$ en considérant au lieu de "l'équation aux dateurs" (37) - (38), une autre forme d'équation d'état appelée *"équation aux compteurs"*. Ainsi, pour l'exemple de la Figure 6, en associant à chaque transition x_i (resp. : u_i, y) une variable $x_i(\tau)$ (resp : $u_i(\tau)$, $y(\tau)$) représentant le nombre de tirs de la transition x_i (resp : u_i, y) jusqu'à l'instant τ, on obtient le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x_1(\tau) \le \text{Min}\{1 + x_2(\tau-4); u_1(\tau-1)\} \\ x_2(\tau) \le \text{Min}\{x_1(\tau-3); u_2(\tau-5)\} \\ x_3(\tau) \le \text{Min}\{1 + x_3(\tau-2); x_1(\tau-3); x_2(\tau-4)\} \\ y(\tau) \le \text{Min}\{1 + x_2(\tau); x_3(\tau-2)\} \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire du même type que (37) - (38) mais dans le dioïde $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \text{Min}, +)$.

7.5 VALEURS PROPRES ET TAUX DE PRODUCTION MAXIMUM D'UN SYSTÈME AUTONOME

Considérons un graphe d'événements temporisé dont l'équation d'état est de la forme (37) et dont, par conséquent, la solution minimale (dates au plus tôt) est donnée par (39) :

$$x(n) = \overline{A}_1 \otimes x(n-1) \oplus \overline{B} \otimes u(n)$$

avec $\overline{A}_1 = A_o^* \otimes A_1$ et $\overline{B} = A_o^* \otimes B$.

Etudions les évolutions de ce système en mode de fonctionnement *autonome* c.à.d. avec des commandes u (n) ne contraignant pas les évolutions du système (on peut choisir par exemple $\forall$ n, u (n) = $\begin{bmatrix} -\infty \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{bmatrix}$).

On a alors, $\forall$ n :

$$x(n) = \overline{A}_1 \otimes x(n-1) \qquad (40)$$

d'où :

$$x(n) = (\overline{A}_1)^n \otimes x(0) \qquad (41)$$

En supposant, pour simplifier, que la matrice $\overline{A}_1$ est *irréductible* (G ($\overline{A}_1$) fortement connexe) nous savons d'après le théorème 4 (§ 4.2 de ce rapport) qu'elle admet une unique valeur propre $\lambda = \rho(\overline{A}_1)$ (rayon spectral). Alors, pour tout vecteur propre w associé à $\lambda = \rho(\overline{A}_1)$, en choisissant x (0) = w on obtient d'après (40) :

$$x(n) = \lambda \otimes x(n-1)$$

On a donc, pour toute transition i du réseau :

$$x_i(n) = \lambda + x_i(n-1) \qquad (42)$$

ce qui montre qu'une activation additionnelle de chacune des transitions du réseau a lieu toutes les λ unités de temps. Si le système représente, par exemple, un atelier de production, (42) peut s'interpréter comme la production d'une nouvelle unité toutes les λ unités de temps ; λ est donc l'inverse du *taux de production*.

D'après les résultats du § 4, la valeur propre $\lambda = \rho(\overline{A}_1)$ correspond, dans le graphe G ($\overline{A}_1$), au poids moyen du circuit de poids moyen maximum (le poids d'un circuit étant la somme des poids des arcs qui le composent). Par analogie avec la notion de chemin critique (pour les problèmes d'ordonnancement statiques de type PERT), un tel circuit est appelé *circuit critique* du système. Ce sont les circuits critiques qui limitent les performances du système et la valeur $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\rho\,(\overline{A}_1)}$ est le taux de production maximum qui puisse être obtenu. Par ailleurs, les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = \rho\,(\overline{A}_1)$ fournissent les différentes conditions d'initialisation possibles permettant de tirer du système ces performances maximales.

Pour d'autres détails concernant les applications du dioïde ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, Max, +) aux systèmes dynamiques discrets représentables par des graphes d'événements, on pourra se référer à BACCELLI et co-auteurs (1992).

Remerciements

Je remercie la Direction des Etudes et Recherches d'EDF (et, en particulier, M. M. GONDRAN), pour son soutien à la recherche présentée ici.

Bibliographie

BACCELLI F., COHEN G., OLSDER G.J., QUADRAT J.P. (1992), *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems*, J. Wiley & Sons, 489 pp.

BACKHOUSE R.C., CARRÉ B.A. (1975), Regular Algebra Applied to Path Finding Problems, *Journal Inst. Math. Appl.*, 15, pp. 161-186.

BAKO A. (1974), Solution of the Multiterminal Minimal Path Problem in a Network with Gains, in *Progress in Operations Research* (A. Prekopa Ed.).

BELLMAN R.E. (1958), On a routing problem, *Quart. Appl. Math.* 16, pp 87-90.

BENZAKEN C. (1968), Structures algébriques des cheminements : pseudo-treillis, gerbiers de carré nul, in *Network and Switching Theory* (G. Biorci Ed.), Academic Press, NY, pp. 40-57.

BENZECRI J.P. (1974), *L'Analyse des Données* : Tome 1 : *Taxinomie*, Dunod, Paris.

BERGE C. (1958), *La Théorie des graphes et ses applications*, Dunod Paris.

BERGE C. (1970), *Graphes et Hypergraphes*, Dunod Paris.

BORCHARDT C.W. (1860), Uber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante, *J. Reine Angew.Math*, 57, pp. 111-121.

BOROS E., ATKIN A.O.L., CECHLÁROVÁ K., PELED U.N. (1997), Powers of Circulants in Bottleneck Algebra, *Linear Algebra and its Appl.*, 258, pp. 137-148.

BRAMS G.W. (1983), *Réseaux de Petri : Théorie et Pratique*, Masson, Paris.

BRUALDI R.A., RYSER H.J. (1991), *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, 367 pp.

BURKARD R.E. (1977), An Algebraic Approach To Assignment Problems, *Math. Programming*, 12, pp. 318-327.

BUTKOVIC P., CECHLÁROVÁ K., SZABÓ P. (1987), Strong Linear Independence in Bottleneck Algebra, *Linear Algebra and its Appl.* 94, pp. 133-155.

CARRÉ B.A. (1971), An Algebra for Network Routing Problems, *J. Inst. Math. Appl.*, 7, pp. 273-294.

CARRÉ B.A. (1971), An Algebra for Network Routing Problems, *J. Inst. Math. Appl.*, 7, pp. 273-294.

CARTIER P., FOATA D. (1969), *Problèmes Combinatoires de Commutation et Réarrangement.* Lecture Notes, in *Mathematics*, 85, Springer Verlag, Berlin.

CAYLEY A. (1854), Sur les déterminantes gauches, *Crelle's J.*, 38, pp. 93-96.

CECHLÁROVÁ K. (1992), Eigenvectors in Bottleneck Algebra, *Linear Algebra and Its Appl.* 175, pp. 63-73.

CHAIKEN S. (1982), A Combinatorial Proof of the All- Minors Matrix Theorem, *S.I.A.M. J. Algebraic and Discrete Methods* 3, pp. 319-329.

CHARNES A., RAIKE W.M. (1966), One-Pass Algorithms for Some Generalized Network Problems, *Operations Research* 14, pp. 914-923.

CHEN W.K. (1976), *Applied Graph Theory : Graphs and Electrical Networks*, North Holland.

CHRÉTIENNE P. (1983), *Les Réseaux de Petri Temporisés*, Thèse, Université Paris 6.

COHEN G., DUBOIS D., QUADRAT J.P., VIOT M. (1983), *Analyse du comportement périodique de systèmes de production par la théorie des dioïdes*, Rapport Technique 191, INRIA, Rocquencourt.

COHEN G., DUBOIS D., QUADRAT J.P., VIOT M. (1985), A Linear-System Theoretic view of Discrete Event Processes and its use for Performance Evaluation in Manufacturing, *IEEE Trans. on Autom. Control AC-30*, 3, pp. 210-220.

COHEN G., MOLLER P., QUADRAT J.P., VIOT M. (1989), Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems, *I.E.E.E. Proceedings, Special Issue on Discrete Event Systems*, 77, n° 1.

COLLOMB P., GONDRAN M. (1977), Un algorithme efficace pour l'arbre de classification, *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle*, vol. 1, pp. 31-49.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1962), Describing Industrial Processes with Inference and approximating their Steady State Behaviour, *Operational Res. Quart.* 13, pp. 95-100.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1976), Projections in a Minimax Algebra, *Math Progr.* 10, pp. 111-123.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1979), Minimax Algebra, Lecture Notes, in *Economics and Mathematical Systems* 166, Springer, New York.

CUNINGHAME-GREEN R.A. (1991), Algebraic Realization of Discrete Dynamical Systems, *Proceedings of the 1991 IFAC Workshop on Discrete Event System Theory and Applications in Manufacturing and Social Phenomena*, International Academic Publishers, pp. 11-15.

CUNINGHAME-GREEN R.A., MEIJER P.F.J. (1980), An Algebra for Piecewise-linear Minimax Problems, *Discrete Appl. Math.* 2, pp. 267-294.

DANTZIG G.B. (1966), All Shortest Routes in a Graph, dans *Théorie des Graphes*, Proceedings Int. Symp. Rome, Italy, Dunod, Paris, pp. 91-92.

DANTZIG G.B., BLATTNER W.O., RAO M.R. (1967), Finding a Cycle in a Graph with Minimum Cost-to-Time Ratio with Application to a Ship Routing Problem, in *Théorie des graphes*, proceedings int. symp. Rome, Italy, Dunod, Paris, pp. 209-214.

DEFAYS D. (1978), Analyse hiérarchique des Préférences et généralisations de la transitivité, *Math. Sc. Hum.*, n° 61, pp. 5-27.

DIJKSTRA E.W. (1959), A Note on Two Problems in Connection with Graphs, *Numerische Mathematik* 1, pp. 269-271.

DUBOIS D., STECKE K.E. (1990), Dynamic Analysis of Repetitive Decision - Free Discrete Event Processes : The Algebra of Timed Marked Graphs and Algorithmic Issues, *Annals of Operations Research* 26, pp. 151-193.

EILENBERG S. (1974), *Automata, Languages and Machines*, Academic Press.

FLOYD R.W. (1962), Algorithm 97 : Shortest Path, *Comm. A.C.M.* 5, p. 345.

FOATA D. (1965), *Etude algébrique de certains problèmes d'Analyse Combinatoire et du Calcul des Probabilités*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 14.

FOATA D. (1980), A Combinatorial Proof of Jacobi's Identity, *Annals Discrete Maths* 6, pp. 125-135.

FORD L.R. Jr (1956), Network Flow Theory, *The Rand Corporation*, p. 293.

GAUBERT S. (1992), *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*, Thèse, Ecole des Mines de Paris.

GAUBERT S. (1995a), Performance evaluation of (Max, +) Automata", *IEEE Trans. Automatic Control* 40 (12), pp. 2014-2025.

GAUBERT S. (1995b), Resource Optimization and (Min, +) Spectral Theory, *IEEE Trans. Automatic Control* 40 (12), pp. 1931-1934.

GAUBERT S., MAIRESSE J. (1998), Modeling and Analysis of Timed Petri Nets using Heaps of Pieces, *IEEE Trans. Automatic Control*, à paraître.

GAUBERT S., BUTKOVIC P., CUNINGHAME-GREEN R. (1998), Minimal (Max, +) Realizations of Convex Sequences, *SIAM Journal Control Optim.* 36, 1, pp. 137-147.

GONDRAN M. (1974), Algèbre linéaire et Cheminement dans un Graphe, *R.A.I.R.O.*, vol. 1, pp. 77-99.

GONDRAN M. (1975), Path Algebra and Algorithms, in *Combinatorial Programming : Methods and Applications* (B. Roy Ed.) D. Reidel Publish Co., pp. 137-148.

GONDRAN M. (1976a), Valeurs Propres et Vecteurs Propres en Classification Hiérarchique, *R.A.I.R.O. Informatique Théorique*, 10, 3, pp. 39-46.

GONDRAN M. (1976b), *Des algèbres de chemins très générales : les semi-anneaux à gauche et à droite*, Note interne EDF 2194/02, non publié.

GONDRAN M. (1995), Valeurs Propres et Vecteurs Propres en Analyse des Préférences ou Trois solutions du paradoxe de Condorcet, Note EDF HI-00/95-001.

GONDRAN M., MINOUX M. (1977), Valeurs propres et Vecteurs propres dans les Dioïdes et leur Interprétation en Théorie des Graphes, *Bull. Dir. Et. Rech. EDF*, Série C, pp. 24-41.

GONDRAN M., MINOUX M. (1978), L'indépendance linéaire dans les Dioïdes, *Bull. Dir. Et. Rech. EDF*, Série C, n° 1, pp. 67-90.

GONDRAN M., MINOUX M. (1979), *Graphes et Algorithmes*, Eyrolles, Paris, 3e édition revue et augmentée 19950.

GONDRAN M., MINOUX M. (1979), Valeurs propres et Vecteurs propres en Théorie des graphes, Colloques Internationaux, CNRS Paris 1978, pp. 181-183. *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems* 166, Springer Verlag, Berlin.

GONDRAN M., MINOUX M. (1984), Linear Algebra in Dioïds. A survey of recent results, in *Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research* (BURKARD R.E., CUNINGHAME-GREEN R.A., ZIMMERMANN U. Editors), *Annals of Discrete Mathematics* 19, pp. 147-164.

GRAHAM S.L., WEGMAN M. (1976), A Fast and Usually Linear Algorithm for Global Flow Analysis, *Journal ACM*, 23, 1, pp. 172-202.

GUNAWARDENA J. (1998), *Idempotency*, Publications of the Newton Institute, Cambridge University Press, 1998.

HALPERN J., PRIESS I. (1974), Shortest Paths with Time Constraints on Movement and Parking, *Networks*, 4, pp. 241-253.

HAMMER P.L., RUDEANU S. (1968), *Boolean Methods in Operations Research*, Springer Verlag.

HOFFMAN A.J. (1963), On Abstract dual Linear Programs, *Naval Research Logistics Quarterly* 10, pp. 369-373.

HU T.C. (1961), The Maximum Capacity Route Problem, *Operations Research* 9, pp. 898-900.

HU T.C. (1967), Revised Matrix Algorithms for Shortest Paths, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, 15, 1, pp. 207-218.

KAILATH T. (1980), *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

KARP R.M. (1978), A Characterization of the minimum cycle mean in a digraph, *Discrete Mathematics* 23, pp. 309-311.

KAUFMANN A., MALGRANGE Y. (1963), Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe, *R.I.R.O.*, 26, pp. 61-73.

KLEENE S.C. (1956), "Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata" in *Automata Studies* (Shannon & Mc Carthy Editors), Princeton University Press, pp. 3-40.

KUNTZMANN J. (1972), *Théorie des Réseaux*, Dunod, Paris.

LALLEMENT G. (1979), *Semigroups and Combinatorial Applications*, J. Wiley & Sons.

LAUE H. (1988), A Graph Theoretic proof of the fundamental trace identity, *Discrete Math* 69, pp. 197-198.

LAWLER E.L. (1967), Optimal Cycles in doubly Weighted Directed Linear Graphs, in *Théorie des Graphes*, Proc. Int. Symp., Rome, Italy, (1966), Dunod, Paris, pp. 209-213.

LEHMANN D.J. (1977), Algebraic Structures for Transitive Closure, *Theor. Comput. Sc.*, 4, pp. 59-76.

MACMAHON P.A. (1915), *Combinatory Analysis*, Cambridge University Press et Chelsea Publishing Co., New York, 1960.

MINIEKA E., SHIER D.R. (1973), A Note on an Algebra for the k Best Routes in a Network, *J. Inst. Math. Appl.*, 11, pp. 145-149.

MINOUX M. (1975), Plus courts chemins avec contraintes, *Annales des Télécommunications* 30, n° 11-12, pp. 383-394.

MINOUX M. (1976), Structures algébriques généralisées des problèmes de cheminement dans les graphes : Théorèmes, Algorithmes et Applications, *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle*, vol. 10, n° 6, pp. 33-62.

MINOUX M. (1977), Generalized Path Algebras, in *Surveys of Mathematical Programming* (A. PREKOPA Editor) Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences, pp. 359-364.

MINOUX M. (1982), *Linear Dependence and Independence in Lattice Dioïds*, Note interne C.N.E.T. non publiée.

MINOUX M. (1997), Bideterminants, Arborescences and Extension of the Matrix-Tree Theorem to Semirings, *Discrete Mathematics,* 171, pp. 191-200.

MINOUX M. (1998), A Generalization of the All Minors Matrix Tree Theorem to Semirings. *Discrete Mathematics* (to appear).

MOLLER P. (1987), *Notions de rang dans les dioïdes vectoriels*, Actes de la Conférence "Algèbres exotiques et systèmes à événements discrets" C.N.E.T., 3-4 juin 1987.

OLSDER G.J., ROOS C. (1988), Cramer and Cayley-Hamilton in the Max-Algebra, *Linear Algebra and its Applications*, 101, pp. 87-108.

ORLIN J.B. (1978), Line Digraphs, Arborescences and Theorems of Tutte and Knuth, *Journal Combinatorial Theory*, B, 25, pp. 187-198.

PERTERSON J.L. (1981), *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice Hall, 290 pp.

REUTENAUER C., STRAUBING H. (1984), Inversion of Matrices over a Commutative Semiring, *J. of Algebra*, 88, n° 2, pp. 350-360.

ROBERT F., FERLAND J. (1968), Généralisation de l'algorithme de Warshall, *R.I.R.O.* 7, pp. 71-85.

ROTE G. (1990), Path Problems in Graphs, *Computing Suppl.* 7, pp. 155-189.

ROY B. (1975), Chemins et Circuits : Enumérations et Optimisation, in *Combinatorial Programming : Methods and Applications* D. Reidel, Boston, pp. 105-136.

RUTHERFORD D.E. (1964), The Cayley-Hamilton Theorem for Semirings, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sec.* A, 66, pp. 211-215.

SALOMAA A. (1969), *Theory of Automata,* Pergamon Press, Oxford.

SIMON I. (1994), On Semigroups of Matrices over the Tropical Semiring, *Informatique Théorique et Appl.* vol. 28, n° 3-4, pp. 277-294.

STRAUBING H. (1983), A Combinatorial proof of the Cayley-Hamilton Theorem, *Discrete Mathematics* 43, pp. 273-279.

TARJAN R.E. (1981), A Unified Approach to Path Problems, *J. A.C.M.*, vol 28, n° 3, pp. 577-593.

TUTTE W.T. (1948), The dissection of equilateral Triangles into equilateral Triangles, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 44, pp. 463-482.

WAGNEUR E. (1991), Moduloïds and Pseudomodules 1. Dimension Theory, *Discrete Mathematics* 98, pp. 57-73.

WARSHALL S. (1962), A Theorem on Boolean Matrices, *Journal A.C.M.* 9, p. 11.

WONGSEELASHOTE A. (1976), An Algebra for Determining all Path Values in a Network with Application to K-Shortest-Paths Problems, *Networks*, 6, pp. 307-334.

WONGSEELASHOTE A. (1979), Semirings and Path Spaces, *Discrete Mathematics* 26, pp. 55-78.

ZEILBERGER D. (1985), A Combinatorial Approach to Matrix Algebra, *Discrete Mathematics* 56, pp. 61-72.

ZIMMERMANN U. (1981), Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures, *Annals of Discrete Mathematics* 10.