# Une algèbre incidente...

Éric Jacopin

LAFORIA-IBP, Boîte 169,
Tour 46-0 2ième étage,
Université Pierre et Marie Curie,
4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05

jacopin@laforia.ibp.fr

# ...pour la planification de type Strips

# Propriétés

(Kambhampati, Knoblock & Yang, AIJ, 1995 - Minton, Bresina & Drummond IJCAI'91)

**E est un espace de recherche dont les nœuds sont des plans**
**R transforme un nœud en ses fils**
**$\langle\langle N \rangle\rangle$ est l'ensemble des solutions potentielles du nœud N**

**R est dit systématique si $\forall$ Ni,Nj, i$\neq$j $\langle\langle Ni \rangle\rangle \cap \langle\langle Nj \rangle\rangle = \varnothing$**

**L transforme des nœuds distincts de E(po) en des ensembles de nœuds disjoints de E(to); c'est-à-dire,**

**si u1, u2 $\in$ E(po) et u1$\neq$u2 alors L(u1) $\cap$ L(u2) = Ø**

**f est injective ssi x$\neq$y $\rightarrow$ f(x)$\neq$f(y)**

po = plan partiellement ordonné – to = plan totalement ordonné

# Marche aléatoire : questions

(Persi Diaconis, Group Representations in Probability and Statistics)

- **Combien de temps pour atteindre un nœud particulier (ou un ensemble de nœuds) à partir d'un nœud donné (ou aléatoire) ?**

- **Combien de temps pour attendre tous les nœuds ?**

- **Combien de temps jusqu'au premier retour au point de départ ? Combien de nœuds sont visités avant de retourner au point de départ ? Quelle est la profondeur maximum atteinte avant de revenir au point de départ ?**

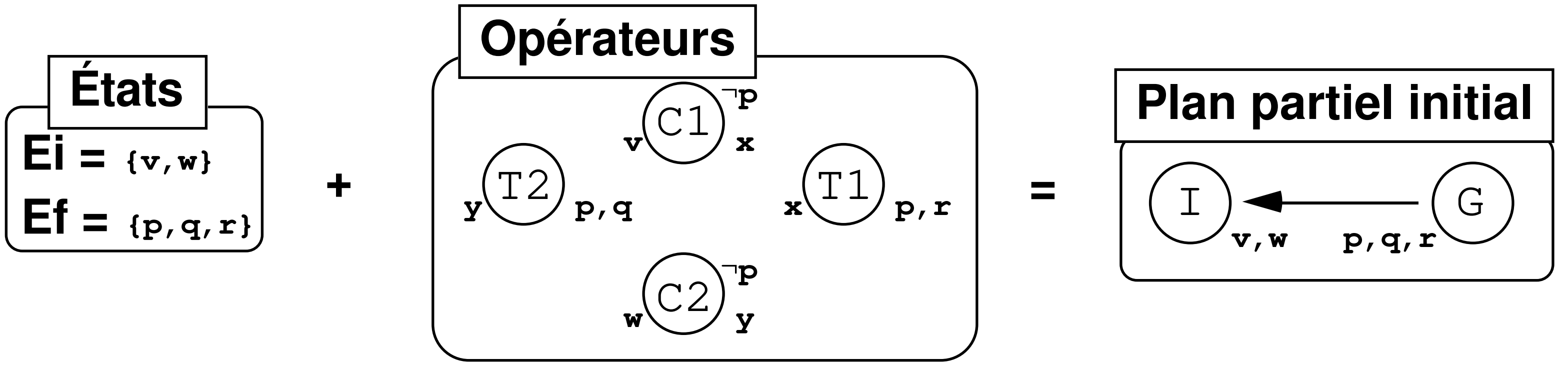
- **Combien de temps pour visiter un nœud déjà visité ?**

# Structure: questions

**Quelle est la structure mathématique...**

- **capable de représenter l'espace des plans partiels ?**
- **dont les éléments correspondent à des mouvements dans l'espace des plans partiels ?**
- **dont les relations, propriétés et axiomes correspondent à des "objets" de l'espace des plans partiels ?**
- **qui fournit une théorie pour la planification classique (i.e. structuration et prédiction) ?**
- **planification //, given-depth movements, analyse harmonique...**

# Illustration (1)




**Découverte du chemin de PPinitial à PPsolution :**

$$\boxed{\textbf{PPinitial} \rightarrow \textbf{PP1} \rightarrow \textbf{...} \rightarrow \textbf{PPn} \rightarrow \textbf{PPsolution}}$$

# Illustration (2)

**(PPinitial $\rightarrow$ PP1 $\rightarrow$ ... $\rightarrow$ PPn $\rightarrow$ PPsolution)**

**Loi de transition : PPi = PPi-1 $\cup$ {O',<'}**

- **U est idempotente (i.e. {a} $\cup$ {a} = {a})**
- **Si ({PPi}, $\cup$)} est un monoïde**
  **( $\cup$ est associative, ($\varnothing$,$\varnothing$) est élément neutre)**
  **comment l'immerger dans un groupe ?**
  **(i.e quels sont les inverses des PPi ?)**

**Quel est l'inverse d'un plan partiel ?**

**Comment abandonner $\cup$ ?**

# De la facilité

(Gian Carlo Rota, 1965 - Martin Aigner, 1979)

**$(P,\geq)$ un ensemble partiellement ordonné**

$$\boxed{A(IF) = \{f \mid f : P^2 \to IF,\ \neg(y \geq x) \to f(x,y) = 0\}}$$

**L'algèbre incidente A(IF) est une sous-algèbre de $T_{|P|}$ (IF),**
**algèbre des matrices triangulaires d'ordre |P| à coefficients dans IF.**

**PP, l'espace des plans partiels, est une sous-algèbre de $T_{|P|}$ (IF)**

**IF est un corps éventuellement fini (par exemple $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier) ou pas (IR).**

# Mouvements dans le PPS

**(PP est une sous-algèbre de A(IF))**

## Transformation d'un plan partiel 1

$$\begin{aligned} f : PP &\rightarrow PP \\ p &\rightarrow q = f(p) \end{aligned}$$

f est un endomorphisme sur PP

$\varepsilon$(PP) est l'ensemble des endomorphismes sur PP

## Composition des transformations 2

$$\begin{aligned} o : \varepsilon(PP) &\rightarrow \varepsilon(PP) \\ (f,g) &\rightarrow h = f \circ g \end{aligned}$$

$(f \circ g)(p) = f(g(p))$

$$\begin{aligned} + : \varepsilon(PP) &\rightarrow \varepsilon(PP) \\ (f,g) &\rightarrow h = f + g \end{aligned}$$

$(f + g)(p) = f(p) + g(p)$

**($\varepsilon$(PP), +, o) est un anneau commutatif**

**($\varepsilon$(PP), +) est isomorphe à (PP, +)**

# Mouvements dans le PPS

(contenu)

**Qu'est-ce qu'un élément de $\varepsilon$(PP) pour la planification classique ?**

$$\boxed{1_n = \{x \mid x_{ii} = 0 \text{ et } x_{ij} \in \mathrm{IF} \text{ pour } n \geq j > i \geq 1\}}$$

($1_n$ est une sous-algèbre de $T_n$(IF))

(on note $1_{ij}$ un élément de $1_n$ avec des 0 partout sauf un 1 en ij)

$$\begin{aligned} t\_b : PP &\to PP \\ p &\to q = t\_b(p) = p + b \quad \text{avec } b \in 1_n \end{aligned}$$

(t_b est une translation ; c'est aussi un endomorphisme bijectif (i.e. automorphisme) sur PP)

**Soit t_g|t_g(p) = p + g avec $g = \sum \alpha_{i,j} 1_{ij}$ où $\alpha_{i,j} \in \{0,1\}$, alors :**

- **({t_g},+,o) est un corps commutatif et PP muni de ({t_g},o) est un espace affine**

# Quelques définitions (1)

**(PP muni de ({t_b},o) est un espace affine)**

- **{t_g} est l'ensemble des opérations de modification de plan**
- **I + $1_{1n}$ est l'*origine* de l'espace affine ; c'est aussi le *problème de planification* de PP.**
- **Un *critère de construction de plan* :**

$$\kappa : PP \rightarrow PP \times \mathcal{P}(\{t\_b\})$$
$$p \rightarrow (p,\{t|t \in t\_b\})$$

- **Une *solution* à un problème de planification est un plan partiel p tel que $\kappa(p) = (p,\emptyset)$**
- **si $\kappa(p)$ est injective on dit que $\kappa(p)$ est systématique**

# Quelques définitions (2)

- **({t_g},o) est le groupe abélien des translations ; c'est aussi un groupe libre de base {t_b}.**

- **Soit $\Gamma$ le graphe défini par l'action du groupe libre ({t_g},o) sur PP, alors $\Gamma$ est un arbre homogène.**

- **Une translation étant commutative, le graphe est dit systématique si et seulement si cette commutativité n'est jamais utilisée.**

# Perspectives

- // (topologie sur les segments de l'ordre partiel)
- Analyse harmonique (paire de Gelfand, métriques)
- Champs de potentiel (IF = IR)
- Un peu de chance